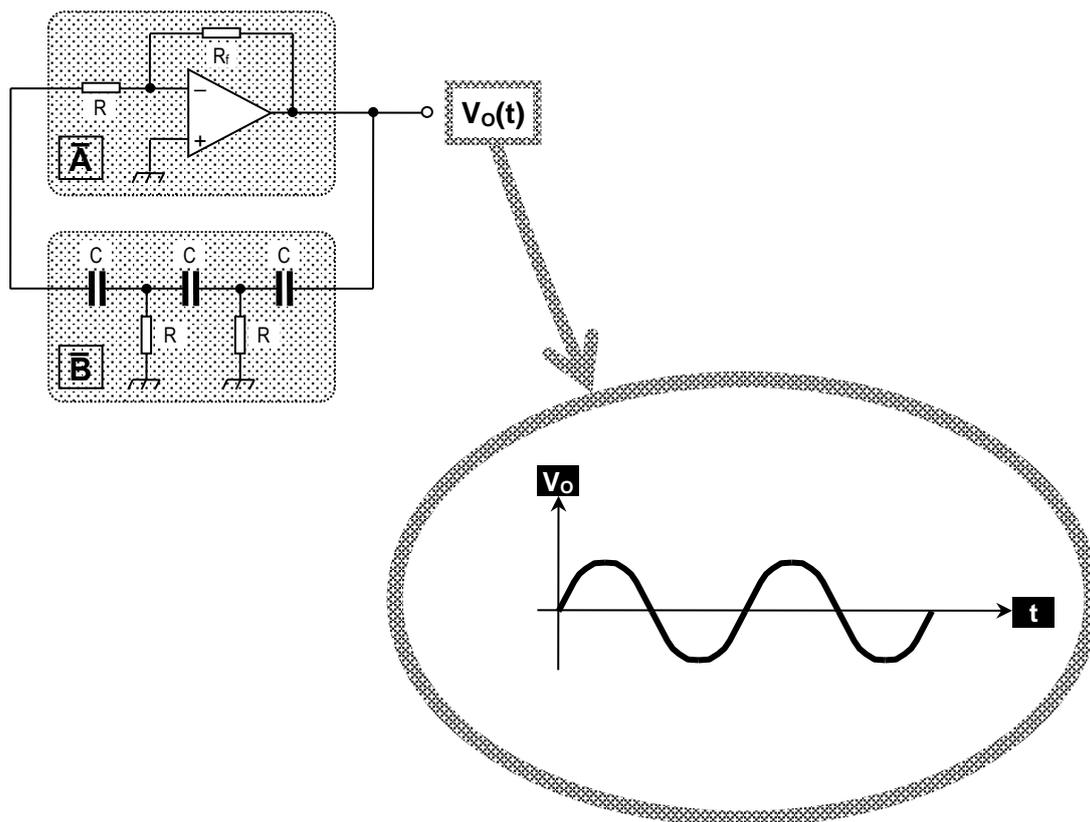


Elettronica analogica 5

Capitolo 5

Gli oscillatori sinusoidali



Prof. Giuseppe Di Michele --- fascicolo di 16 pagine --- marzo 2022

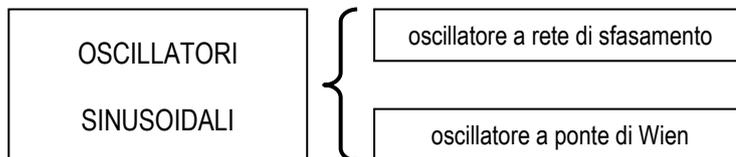
Gli oscillatori sinusoidali

<u>Introduzione</u>	3
<u>5.1 -- Criterio di Barkhausen</u>	4
<u>5.2 -- Oscillatore a rete di sfasamento</u>	6
<u>5.3 -- Oscillatore a ponte di Wien</u>	10
<u>Dimostrazioni</u>	14
<u>Quadri riassuntivi</u>	16

Introduzione

Gli oscillatori sinusoidali sono circuiti in grado di produrre una tensione d'uscita $V_O(t)$ oscillante di forma sinusoidale. Esistono molti tipi di oscillatori sinusoidali, in questo capitolo ne analizzeremo soltanto due:

- 1) oscillatore a rete di sfasamento;
- 2) oscillatore a ponte di Wien.



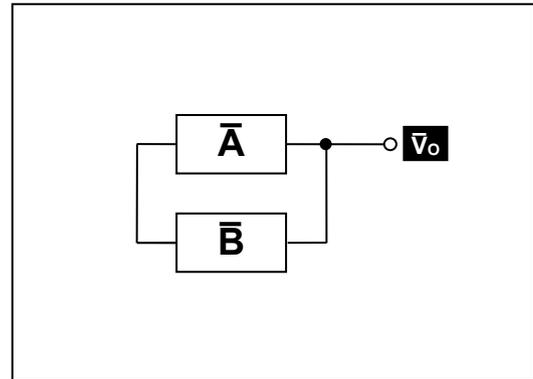
Questi circuiti oscillatori, funzionando in regime sinusoidale, sono studiati con il metodo dei numeri complessi, e basano il loro funzionamento sulla teoria dei sistemi in retroazione, in particolare sul criterio di Barkhausen.

Nelle prossime pagine presenteremo innanzitutto il criterio di Barkhausen, poi analizzeremo in dettaglio gli oscillatori sinusoidali citati sopra. Per ciascuno di essi ne definiremo il funzionamento, ne indicheremo le soluzioni circuitali e ne risolveremo i classici problemi di analisi e di sintesi.

Conclude il capitolo un quadro riassuntivo dei circuiti presentati con le relative formule notevoli.

5.1 -- Criterio di Barkhausen

I generatori di onda sinusoidale che presenteremo in questo capitolo basano il loro funzionamento sulla teoria dei sistemi in retroazione privi di ingresso. Pertanto sono circuiti schematizzabili con due blocchi funzionali (\bar{A} e \bar{B}), collegati in retroazione come rappresentato nella figura a lato, in grado di produrre una tensione sinusoidale di uscita $V_O(t)$ rappresentata dal numero complesso \bar{V}_O . Affinchè questo sistema possa funzionare da oscillatore, occorre che i blocchi \bar{A} e \bar{B} rispettino la relazione $\bar{A} \cdot \bar{B} = 1$, chiamata "criterio di Barkhausen". Vediamo nel dettaglio come stanno le cose.



Il Criterio di Barkhausen

Il sistema in retroazione appena presentato si compone del blocco di azione diretta \bar{A} e del blocco di retroazione \bar{B} .

- Il blocco di azione diretta \bar{A} riceve in ingresso la funzione sinusoidale \bar{V}_I , e produce in uscita la funzione sinusoidale \bar{V}_O . La relazione ingresso→uscita è la seguente:

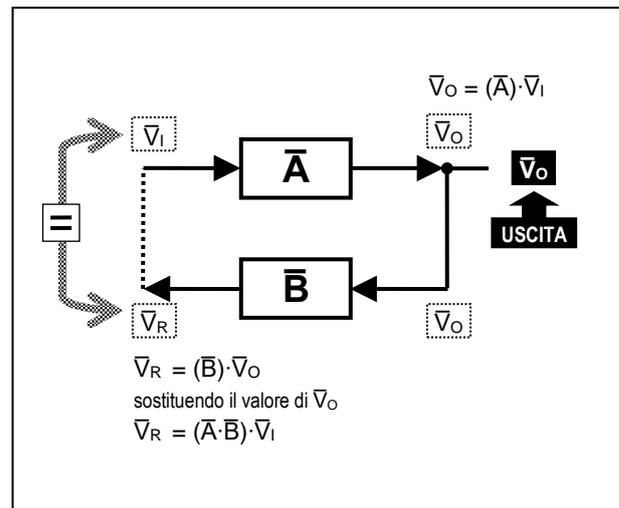
$$\bar{V}_O = (\bar{A}) \cdot \bar{V}_I .$$

- Il blocco di retroazione \bar{B} riceve in ingresso la funzione sinusoidale \bar{V}_O , e produce in uscita la funzione sinusoidale \bar{V}_R . La relazione ingresso→uscita è la seguente:

$$\bar{V}_R = (\bar{B}) \cdot \bar{V}_O .$$

Poichè la tensione \bar{V}_O costituisce l'uscita del blocco \bar{A} , sostituendo si ottiene:

$$\bar{V}_R = (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{V}_I .$$



Ora, affinché l'intero sistema possa auto-sostenersi, producendo autonomamente l'uscita \bar{V}_O , è necessario che il blocco \bar{B} sia in grado di fornire la funzione di ingresso \bar{V}_I al blocco \bar{A} . Esprimendosi in formule, ciò si traduce nell'equazione:

$$\bar{V}_R = \bar{V}_I .$$

Sostituendo il valore appena trovato per \bar{V}_R , questa equazione diventa:

$$(\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{V}_I = \bar{V}_I$$

che è soddisfatta se si verifica la condizione:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 1 .$$

Questo è appunto il *Criterio di Barkhausen*: la condizione necessaria affinché il sistema in retroazione descritto sopra possa autoprodurre una tensione sinusoidale $V_O(t)$ di modulo costante.

Il criterio di Barkhausen è un'equazione complessa, quindi si scinde in due equazioni reali: l'una per il modulo, l'altra per l'argomento:

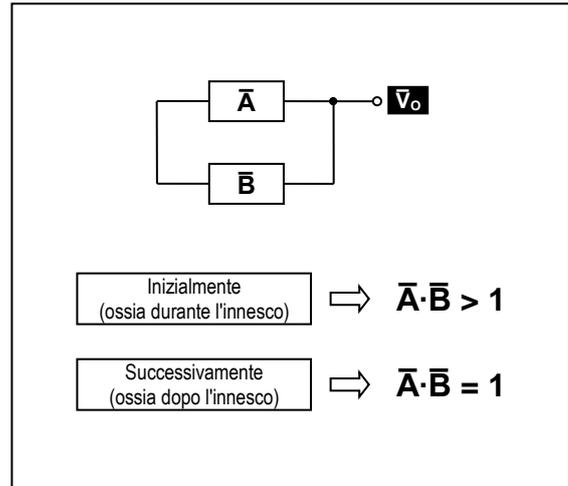
$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{per il modulo} \rightarrow \text{mod}[\bar{A} \cdot \bar{B}] = 1 \\ \text{per l'argomento} \rightarrow \text{imm}[\bar{A} \cdot \bar{B}] = 0 \end{cases}$$

Il problema dell'innescò

Il criterio di Barkhausen garantisce il mantenimento dell'oscillazione $V_O(t)$ sinusoidale quando essa è già presente in uscita. Ma, all'accensione del circuito, l'uscita non è sede di alcuna $V_O(t)$ sinusoidale, quindi essa, in assenza di particolari accorgimenti, non oscillerà mai.

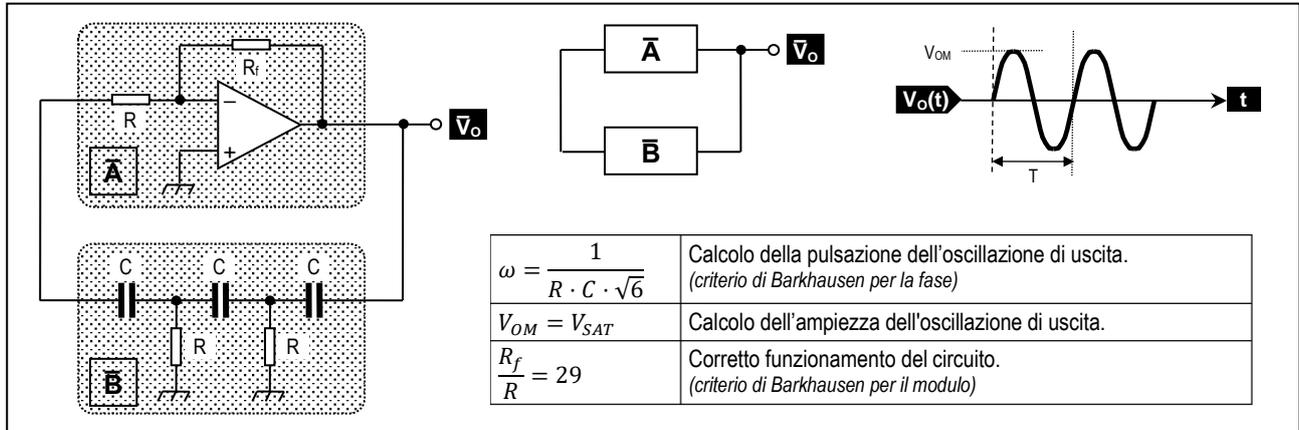
Per risolvere il problema, bisogna partire dalla considerazione che, per ragioni legate alla temperatura, all'uscita del circuito è sempre presente del rumore, ossia di una oscillazione spontanea, di tipo casuale, avente una banda di frequenze che va da frazioni di Hz a circa 1000 GHz. In questo intervallo di frequenze è sicuramente presente anche la componente sinusoidale di frequenza f_0 che si vuole ottenere.

Allora, per innescare l'oscillazione, occorre che il circuito in retroazione amplifichi al momento dell'accensione questa oscillazione infinitesima f_0 (il che si ha con $\bar{A} \cdot \bar{B} > 1$), e poi ne interrompa l'amplificazione a transitorio terminato (il che si ha con $\bar{A} \cdot \bar{B} = 1$), condizione necessaria affinché tale oscillazione rimanga stabile e non continui ad aumentare all'infinito.



5.2 -- Oscillatore a rete di sfasamento

L'oscillatore a rete di sfasamento è realizzato con la struttura di un sistema retroazionato privo di ingresso (come illustrato nel paragrafo 1) e produce in uscita una tensione $V_O(t)$ avente la forma di un'onda sinusoidale simmetrica con periodo T e ampiezza V_{OM} . La figura seguente mostra il circuito che realizza questa funzionalità, la sua forma d'onda di uscita, e le sue formule di dimensionamento.



Analisi del circuito.

Analizziamo nel dettaglio i blocchi \bar{A} e \bar{B} che compaiono nel circuito.

- Il blocco di azione diretta \bar{A} è un amplificatore invertente, e quindi ha la seguente funzione di trasferimento in regime sinusoidale:

$$\bar{A} = -\frac{R_f}{R}$$

- Il blocco di retroazione \bar{B} ha la seguente funzione di trasferimento in regime sinusoidale:

$$\bar{B} = \frac{1}{1 - \frac{5}{(\omega RC)^2} - j \cdot \left(\frac{6}{\omega RC} - \frac{1}{(\omega RC)^3} \right)} \quad (\text{dimostrazione 1 a pag.14})$$

Applicazione del Criterio di Barkhausen

Affinchè il circuito possa auto-oscillare occorre che sia soddisfatto il criterio di Barkhausen:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 1$$

Questa equazione complessa è verificata se sono soddisfatte le due condizioni reali riguardanti la fase e il modulo.

1) Criterio di Barkhausen per la fase

Deve essere soddisfatta la condizione:

$$\text{Im} [\bar{A} \cdot \bar{B}] = 0$$

Poichè: $\bar{A} = -\frac{R_f}{R}$ $\bar{B} = \frac{1}{1 - \frac{5}{(\omega RC)^2} - j \cdot \left(\frac{6}{\omega RC} - \frac{1}{(\omega RC)^3} \right)}$ sostituendo si ottiene:

$$\text{Im} \left[-\frac{R_f}{R} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{(\omega RC)^2} - j \cdot \left(\frac{6}{\omega RC} - \frac{1}{(\omega RC)^3} \right)} \right] = 0$$

da cui si ricava:

$$\frac{6}{\omega RC} - \frac{1}{(\omega RC)^3} = 0$$

Questa equazione è soddisfatta per il seguente valore di ω :

$$\omega = \frac{1}{R \cdot C \cdot \sqrt{6}}$$

che rappresenta la pulsazione di oscillazione del circuito.

2) Criterio di Barkhausen per il modulo

Deve essere soddisfatta la condizione:

$$\text{mod } [\bar{A} \cdot \bar{B}] = 1$$

Alla pulsazione di oscillazione trovata al punto precedente $\omega = 1/(RC\sqrt{6})$ si ha:

$$\bar{A} = -\frac{R_f}{R} \quad \bar{B} = \frac{1}{1 - \frac{5}{(\omega RC)^2} - j \cdot \left(\frac{6}{\omega RC} - \frac{1}{(\omega RC)^3} \right)} = -\frac{1}{29}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\text{mod } \left[\left(-\frac{R_f}{R} \right) \cdot \left(-\frac{1}{29} \right) \right] = 1$$

da cui si ricava:

$$\frac{R_f}{R} = 29.$$

Ampiezza della sinusoide di uscita

L'ampiezza della sinusoide di uscita $V_o(t)$ è uguale alla tensione di saturazione dell'AO.

Problema di sintesi

Progettare un oscillatore a rete di sfasamento che produca la seguente forma d'onda di uscita $V_O(t)$.

Dati dell'AO

$$V_{CC} = \pm 15$$

$$V_{SAT} = 90\% \text{ di } V_{CC}$$

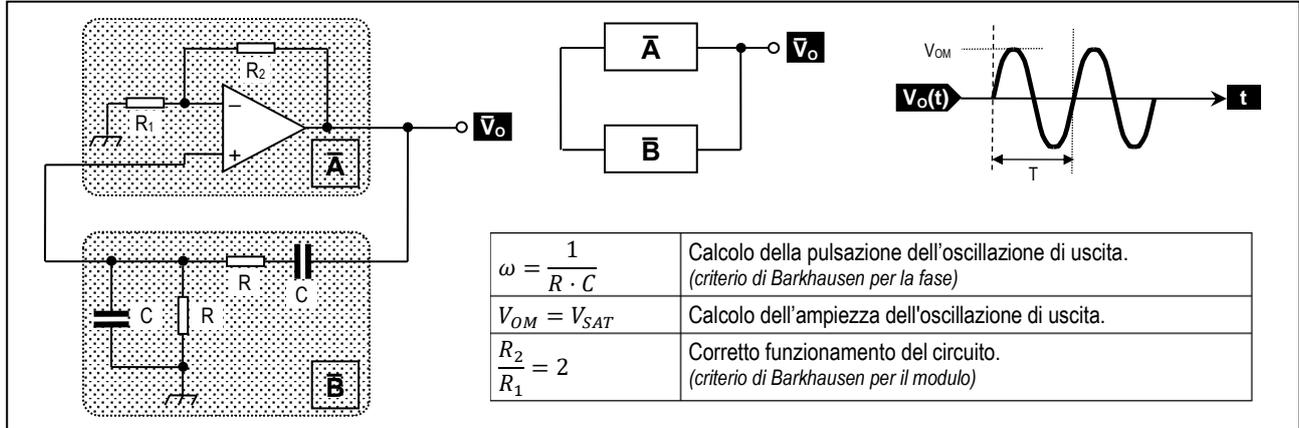
Dati della forma d'onda

$$f = 1 \cdot 10^3$$

- 1) $\omega = 2\pi \cdot f$ $[f = 1 \cdot 10^3 \text{ dato}]$ $\rightarrow \omega = 6,28 \cdot 10^3$
- 2) $\omega = \frac{1}{R \cdot C \cdot \sqrt{6}}$ $[\omega = 6,28 \cdot 10^3 \text{ calcolo 1}]$ $\rightarrow \begin{cases} C = 10 \cdot 10^{-9} \\ R = 6,5 \cdot 10^3 \end{cases} \text{ scelta}$
- 3) $\frac{R_f}{R} = 29$ $[R = 6,5 \cdot 10^3 \text{ calcolo 2}]$ $\rightarrow R_f = 188,5 \cdot 10^3$

5.3 -- Oscillatore a ponte di Wien

L'oscillatore a ponte di Wien è realizzato con la struttura di un sistema retroazionato privo di ingresso (come illustrato nel paragrafo 1) e produce in uscita una tensione $V_O(t)$ avente la forma di un'onda sinusoidale simmetrica con periodo T e ampiezza V_{OM} . La figura seguente mostra il circuito che realizza questa funzionalità, la sua forma d'onda di uscita, e le sue formule di dimensionamento.



Analisi del circuito.

Analizziamo nel dettaglio i blocchi \bar{A} e \bar{B} che compaiono nel circuito.

- Il blocco di azione diretta \bar{A} è un amplificatore non invertente, e quindi ha la seguente funzione di trasferimento in regime sinusoidale:

$$\bar{A} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- Il blocco di retroazione \bar{B} ha la seguente funzione di trasferimento in regime sinusoidale:

$$\bar{B} = \frac{-R \cdot X_C}{-3 \cdot R \cdot X_C + j \cdot (R^2 - X_C^2)} \quad \text{dove } X_C \text{ è la reattanza del condensatore} \quad \rightarrow \quad \left[X_C = -\frac{1}{\omega C} \right] \quad (\text{dim.2, pag.15})$$

Applicazione del Criterio di Barkhausen

Affinchè il circuito possa auto-oscillare occorre che sia soddisfatto il criterio di Barkhausen:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 1$$

Questa equazione complessa è verificata se sono soddisfatte le due condizioni reali riguardanti la fase e il modulo.

1) Criterio di Barkhausen per la fase

Deve essere soddisfatta la condizione

$$\text{Im} [\bar{A} \cdot \bar{B}] = 0$$

Poichè: $\bar{A} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ $\bar{B} = \frac{-R \cdot X_C}{-3 \cdot R \cdot X_C + j \cdot (R^2 - X_C^2)}$ sostituendo si ottiene:

$$\text{Im} \left[\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \frac{-R \cdot X_C}{-3 \cdot R \cdot X_C + j \cdot (R^2 - X_C^2)} \right] = 0$$

da cui si ricava:

$$R^2 - X_C^2 = 0$$

Questa equazione è soddisfatta per il seguente valore di ω :

$$\omega = \frac{1}{R \cdot C}$$

che rappresenta la pulsazione di oscillazione del circuito.

2) Criterio di Barkhausen per il modulo

Deve essere soddisfatta la condizione:

$$\text{mod } [\bar{A} \cdot \bar{B}] = 1$$

Alla pulsazione di oscillazione trovata al punto precedente $\omega = 1/(RC)$ si ha:

$$\bar{A} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \bar{B} = \frac{-R \cdot X_C}{-3 \cdot R \cdot X_C + j \cdot (R^2 - X_C^2)} = \frac{1}{3}$$

sostituendo si ottiene:

$$\text{mod } \left[\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \right) \right] = 1$$

da cui si ricava:

$$\frac{R_2}{R_1} = 2.$$

Ampiezza della sinusoide di uscita

L'ampiezza della sinusoide di uscita $V_o(t)$ è uguale alla tensione di saturazione dell'AO.

Problema di sintesi

Progettare un oscillatore a ponte di Wien che produca la seguente forma d'onda di uscita $V_o(t)$.

Dati dell'AO

$$V_{CC} = \pm 15$$

$$V_{SAT} = 90\% \text{ di } V_{CC}$$

Dati della forma d'onda

$$f = 1 \cdot 10^3$$

1) $\omega = 2\pi \cdot f$

[$f = 1 \cdot 10^3$ dato

→ $\omega = 6,28 \cdot 10^3$

2) $\omega = \frac{1}{R \cdot C}$

[$\omega = 6,28 \cdot 10^3$ calcolo 1

→ $\begin{cases} C = 10 \cdot 10^{-9} & \text{scelta} \\ R = 15,92 \cdot 10^3 \end{cases}$

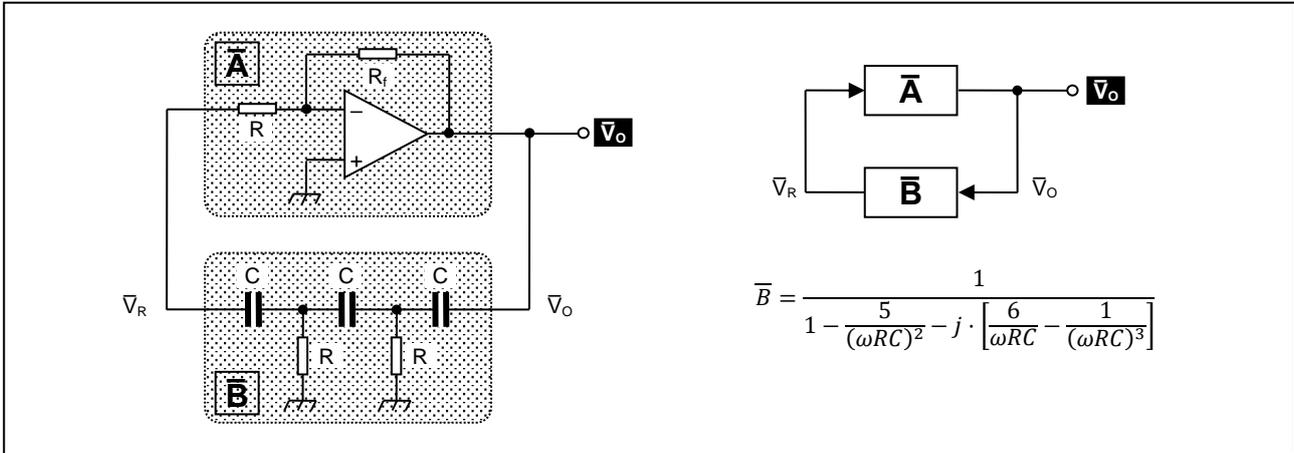
3) $\frac{R_2}{R_1} = 2$

→ $\begin{cases} R_2 = 10 \cdot 10^3 & \text{scelta} \\ R_1 = 5 \cdot 10^3 \end{cases}$

Dimostrazioni

Dimostrazione 1 (formula di pag.6)

Consideriamo l'oscillatore a rete di sfasamento. Mostriamo qui il procedimento con cui si ottiene il valore di \bar{B} relativo al blocco di retroazione.



Circuito (b1). Innanzi tutto occorre notare che la resistenza d'ingresso del blocco A può essere inglobata nel blocco di retroazione \bar{B} per il fatto che tale resistenza, essendo collegata al morsetto invertente dell'AO, è a massa virtuale, quindi a potenziale zero. Pertanto il blocco \bar{B} assume l'aspetto del circuito (b1).

Circuito (b2). Applicando il teorema di Thevenin alla parte finale di (b1) si ottiene il circuito (b2). I parametri di Thevenin presenti in (b2) sono i seguenti:

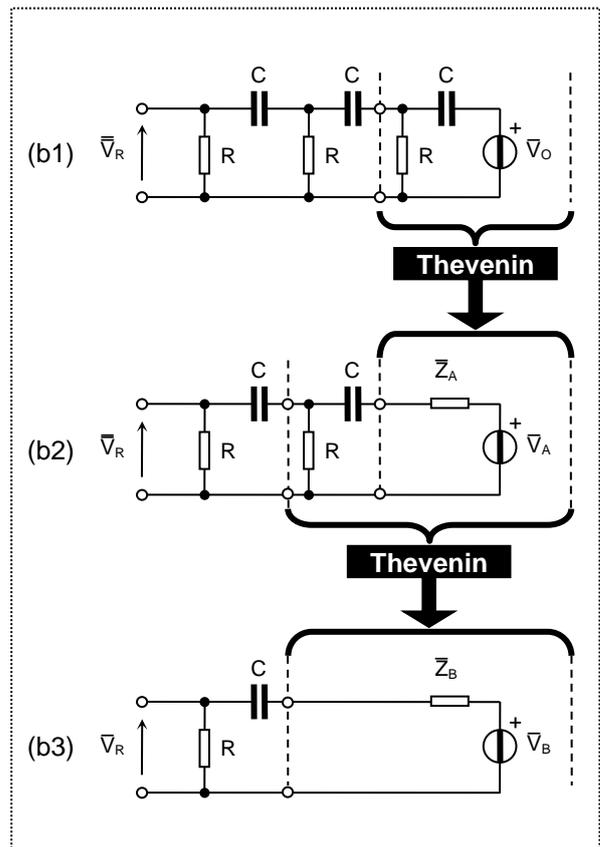
$$\begin{cases} \bar{Z}_A = \bar{Z}_R // \bar{Z}_C = \dots = \frac{R}{1 + sRC} \\ \bar{V}_A = \frac{\bar{Z}_R}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_C} \cdot \bar{V}_O = \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{sRC}} \cdot \bar{V}_O \end{cases}$$

Circuito (b3). Applicando il teorema di Thevenin alla parte finale di (b2) si ottiene il circuito (b3). I parametri di Thevenin presenti in (b3) sono i seguenti:

$$\begin{cases} \bar{Z}_B = \bar{Z}_R // (\bar{Z}_C + \bar{Z}_A) = \dots = \frac{\frac{2}{sC} + \frac{1}{s^2 C^2 R}}{1 + \frac{3}{sRC} + \frac{1}{s^2 R^2 C^2}} \\ \bar{V}_B = \frac{\bar{Z}_R}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_C + \bar{Z}_A} \cdot \bar{V}_A = \dots = \frac{1}{1 + \frac{3}{sRC} + \frac{1}{s^2 R^2 C^2}} \cdot \bar{V}_O \end{cases}$$

Applicando a tale circuito la regola del partitore, si ottiene:

$$\bar{V}_R = \frac{\bar{Z}_R}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_C + \bar{Z}_B} \cdot \bar{V}_B$$



Effettuando le opportune sostituzioni, e considerando il solo regime sinusoidale (la variabile complessa s è sostituita con $j\omega$) si ottiene:

$$\bar{V}_R = \frac{1}{1 - \frac{5}{(\omega RC)^2} - j \cdot \left[\frac{6}{\omega RC} - \frac{1}{(\omega RC)^3} \right]} \cdot \bar{V}_O.$$

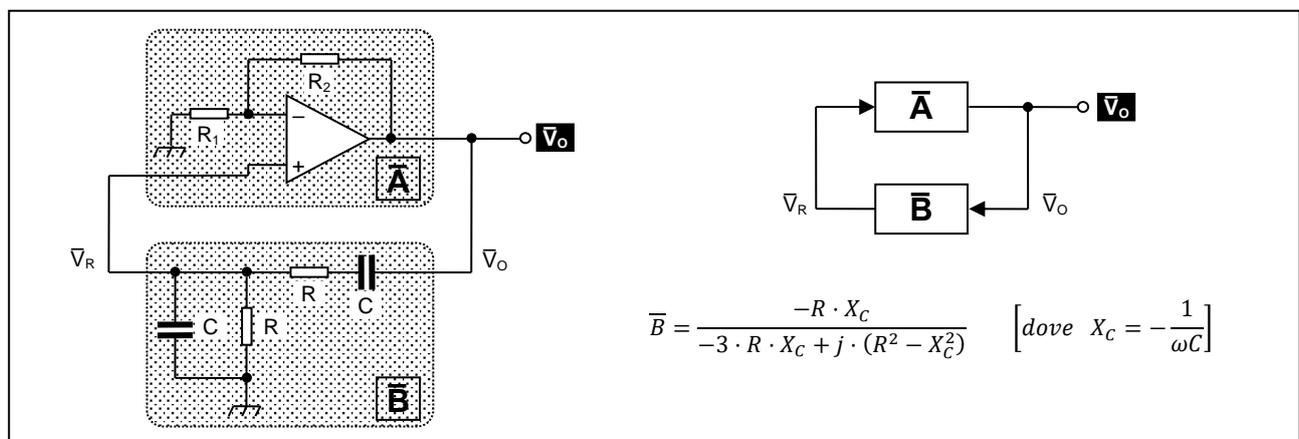
Dividendo ambo i membri per \bar{V}_O si ottiene:

$$\frac{\bar{V}_R}{\bar{V}_O} = \frac{1}{1 - \frac{5}{(\omega RC)^2} - j \cdot \left[\frac{6}{\omega RC} - \frac{1}{(\omega RC)^3} \right]} = \bar{B}.$$

Questa espressione rappresenta il valore di \bar{B} cercato.

Dimostrazione 2 (formula di pag.10)

Consideriamo l'oscillatore a ponte di Wien. Mostreremo qui il procedimento con cui si ottiene la funzione di trasferimento \bar{B} relativo al blocco di retroazione.



Circuito (b1). Ipotizzando che l'AO sia ideale (ossia resistenza di ingresso infinita e resistenza di uscita zero), il blocco \bar{B} può essere rappresentato come il circuito (b1).

Circuito (b2). Nel circuito (b1) si può individuare la presenza di un'impedenza serie \bar{Z}_S e di un'impedenza parallelo \bar{Z}_P :

$$\bar{Z}_S = (R) + (jX_C) \quad \bar{Z}_P = \frac{(R) \cdot (jX_C)}{(R) + (jX_C)} \quad \left[\text{dove } X_C = -\frac{1}{\omega C} \right]$$

Applicando la regola del partitore si ottiene il seguente risultato:

$$\bar{V}_R = \frac{\bar{Z}_P}{\bar{Z}_P + \bar{Z}_S} \cdot \bar{V}_O.$$

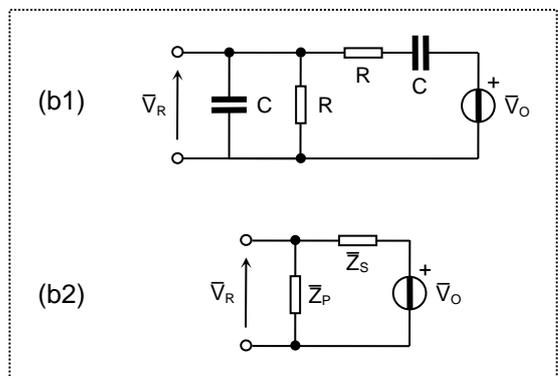
Sostituendo i valori di \bar{Z}_S e \bar{Z}_P appena calcolati, questa formula diventa:

$$\bar{V}_R = \frac{-R \cdot X_C}{-3 \cdot R \cdot X_C + j \cdot (R^2 - X_C^2)} \cdot \bar{V}_O.$$

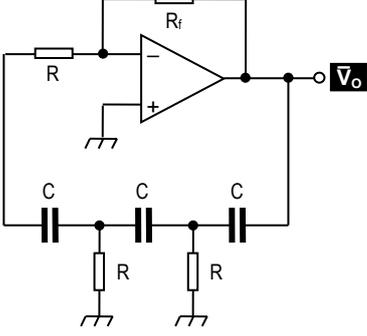
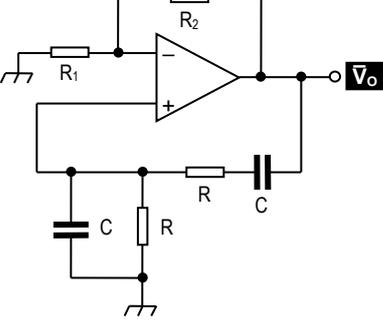
Dividendo ambo i membri per \bar{V}_O si ottiene:

$$\frac{\bar{V}_R}{\bar{V}_O} = \frac{-R \cdot X_C}{-3 \cdot R \cdot X_C + j \cdot (R^2 - X_C^2)} = \bar{B}.$$

Questa espressione rappresenta il valore di \bar{B} cercato.



Quadri riassuntivi

oscillatore a rete di sfasamento		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">$\omega = \frac{1}{R \cdot C \cdot \sqrt{6}}$</td> <td style="padding: 5px;">Calcolo della pulsazione dell'oscillazione di uscita. <i>(criterio di Barkhausen per la fase)</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$V_{OM} = V_{SAT}$</td> <td style="padding: 5px;">Calcolo dell'ampiezza dell'oscillazione di uscita.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\frac{R_f}{R} = 29$</td> <td style="padding: 5px;">Corretto funzionamento del circuito. <i>(criterio di Barkhausen per il modulo)</i></td> </tr> </tbody> </table>	$\omega = \frac{1}{R \cdot C \cdot \sqrt{6}}$	Calcolo della pulsazione dell'oscillazione di uscita. <i>(criterio di Barkhausen per la fase)</i>	$V_{OM} = V_{SAT}$	Calcolo dell'ampiezza dell'oscillazione di uscita.	$\frac{R_f}{R} = 29$	Corretto funzionamento del circuito. <i>(criterio di Barkhausen per il modulo)</i>	
$\omega = \frac{1}{R \cdot C \cdot \sqrt{6}}$	Calcolo della pulsazione dell'oscillazione di uscita. <i>(criterio di Barkhausen per la fase)</i>								
$V_{OM} = V_{SAT}$	Calcolo dell'ampiezza dell'oscillazione di uscita.								
$\frac{R_f}{R} = 29$	Corretto funzionamento del circuito. <i>(criterio di Barkhausen per il modulo)</i>								
oscillatore a ponte di Wien		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">$\omega = \frac{1}{R \cdot C}$</td> <td style="padding: 5px;">Calcolo della pulsazione dell'oscillazione di uscita. <i>(criterio di Barkhausen per la fase)</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$V_{OM} = V_{SAT}$</td> <td style="padding: 5px;">Calcolo dell'ampiezza dell'oscillazione di uscita.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\frac{R_2}{R_1} = 2$</td> <td style="padding: 5px;">Corretto funzionamento del circuito. <i>(criterio di Barkhausen per il modulo)</i></td> </tr> </tbody> </table>	$\omega = \frac{1}{R \cdot C}$	Calcolo della pulsazione dell'oscillazione di uscita. <i>(criterio di Barkhausen per la fase)</i>	$V_{OM} = V_{SAT}$	Calcolo dell'ampiezza dell'oscillazione di uscita.	$\frac{R_2}{R_1} = 2$	Corretto funzionamento del circuito. <i>(criterio di Barkhausen per il modulo)</i>	
$\omega = \frac{1}{R \cdot C}$	Calcolo della pulsazione dell'oscillazione di uscita. <i>(criterio di Barkhausen per la fase)</i>								
$V_{OM} = V_{SAT}$	Calcolo dell'ampiezza dell'oscillazione di uscita.								
$\frac{R_2}{R_1} = 2$	Corretto funzionamento del circuito. <i>(criterio di Barkhausen per il modulo)</i>								