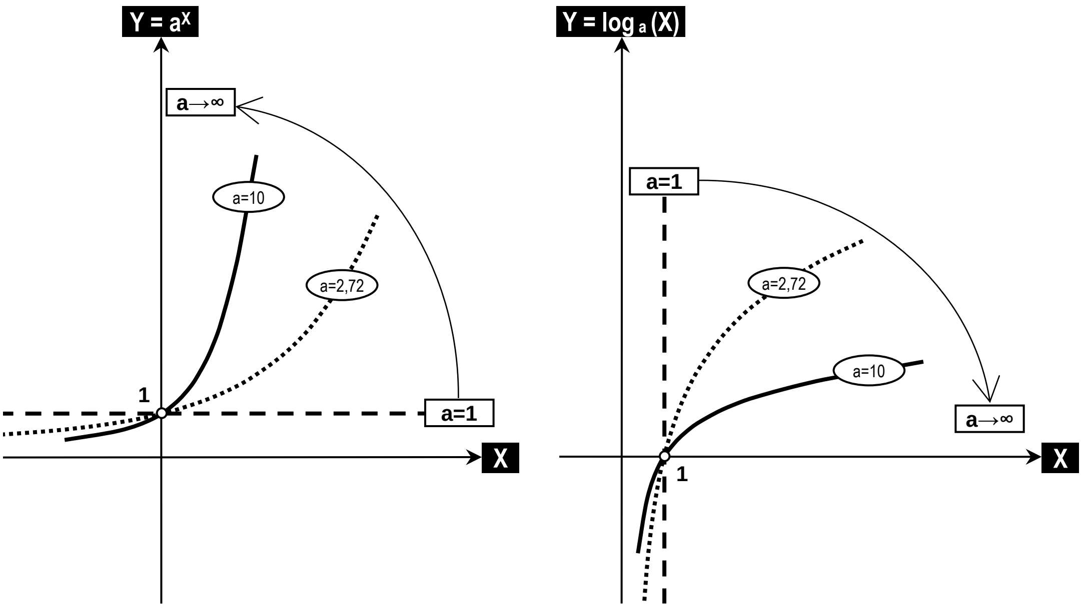
Elettronica 5

Capitolo 0

Premesse



Prof. Giuseppe Di Michele --- fascicolo di 31 pagine --- gennaio 2022

Capitolo 0

Premesse

Introduzione

In questo capitolo introduttivo tratteremo alcuni argomenti che verranno utilizzati nei capitoli successivi. Questi argomenti sono i seguenti.

- Le funzioni esponenziale e logaritmica
  Le funzioni esponenziale e logaritmica sono utilizzate in elettronica in diverse applicazioni. Una di esse è la soluzione del circuito RC alimentato dal gradino di tensione.

- Il circuito RC in risposta al gradino di tensione
  Il circuito RC, alimentato dal gradino di tensione, è utilizzato in elettronica come generatore di ritardo. Ciò trova applicazione in molti circuiti, ad esempio nei multivibratori astabili e monostabile, che avremo modo di analizzare più avanti in questo testo.

- I diagrammi di Bode
  Sappiamo, dalla teoria dei sistemi e anche dall'elettronica, che il funzionamento dei sistemi lineari viene descritto dalla funzione di trasferimento. Se il segnale di ingresso del sistema è una funzione sinusoidale, allora la funzione di trasferimento si semplifica in quanto è definita solo sull'asse immaginario.
  I diagrammi di Bode sono la rappresentazione grafica asintotica delle funzioni di trasferimento dei sistemi lineari funzionanti in regime sinusoidale.

0.1 -- Le funzioni esponenziale e logaritmica

La funzione esponenziale

La funzione esponenziale ha la seguente formulazione matematica:

$\boldsymbol{Y = a^X}$ dove
- a ⇨ è la base dell'esponenziale
- X ⇨ è l'argomento dell'esponenziale
- Y ⇨ è il valore dell'esponenziale

Il suo significato è il seguente:

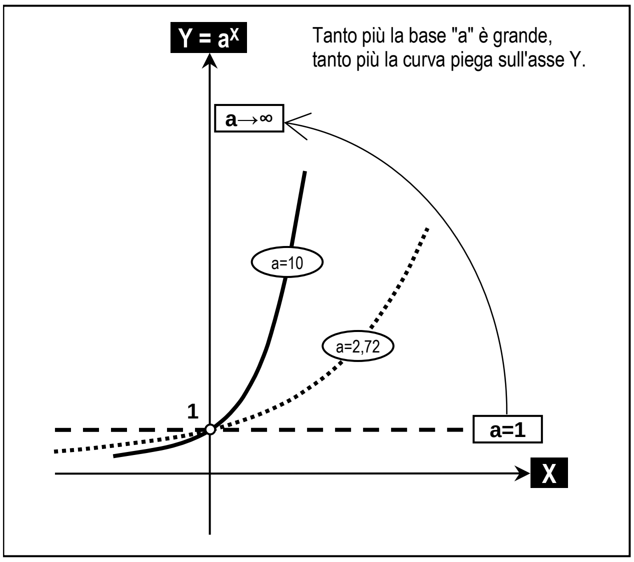
Y è il risultato che si ottiene elevando la base "a" all'esponente X

Il grafico della funzione esponenziale dipende dal valore della base "a". Al variare di "a" si ha una famiglia di curve tutte passanti per il punto di ordinata y=1. Nel seguito analizzeremo solo il caso di a>1 e, in particolare, approfondiremo i due casi di:

a=10 : con questa base si ha l'*esponenziale decimale* che è indicato con la notazione $Y=10^X$;

a=2,72 circa : con questa base si ha l'*esponenziale neperiano* (o *naturale*) che è indicato con la notazione $Y=e^X$.

Il tutto è rappresentato nella figura che segue.



Proprietà

1) $a^0 = 1$
2) $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$
3) $(a^x)^n = a^{n \cdot x}$
4) $\dfrac{1}{a^y} = a^{-y}$
5) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$

La funzione logaritmica

La funzione logaritmica ha la seguente formulazione matematica:

$\boldsymbol{Y = log_a(X)}$ dove
- a ⇨ è la base del logaritmo
- X ⇨ è l'argomento del logaritmo
- Y ⇨ è il valore del logaritmo

Il suo significato è il seguente:

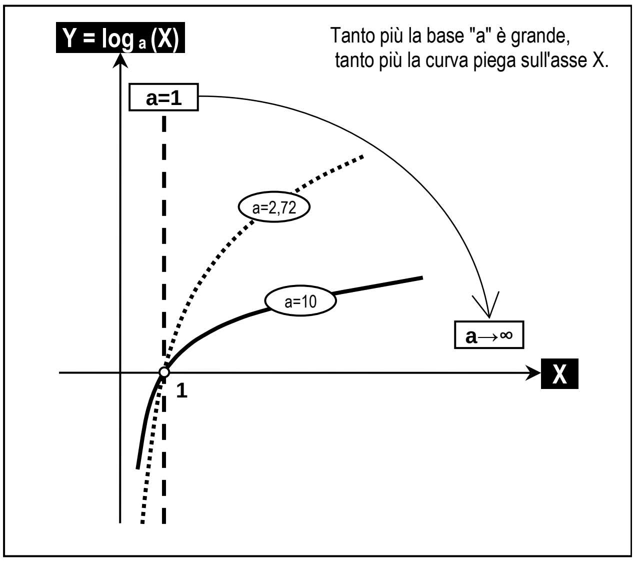
Y è l'esponente che occorre dare alla base "a" per ottenere X

Il grafico della funzione logaritmica dipende dal valore della base "a". Al variare di "a" si ha una famiglia di curve tutte passanti per il punto di ascissa x=1. Nel seguito analizzeremo solo il caso di a>1 e, in particolare, approfondiremo i due casi di:

a=10 : con questa base si ha il *logaritmo decimale* che è indicato con la notazione Y=Log(X);

a=2,72 circa : con questa base si ha il *logaritmo neperiano* (o *naturale*) che è indicato con la notazione Y=ln(X).

Il tutto è rappresentato nella figura che segue.



Proprietà

1) $log_a(1) = 0$
2) $log_a(x) + log_a(y) = log_a(x \cdot y)$
3) $n \cdot log_a(x) = log_a(x^n)$
4) $-log_a(y) = log_a\left(\dfrac{1}{y}\right)$
5) $log_a(x) - log_a(y) = log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$
6) $log_a(b) = \dfrac{log_C(b)}{log_C(a)}$

Il collegamento tra gli esponenziali e i logaritmi

Le formule seguenti costituiscono un collegamento tra gli esponenziali e i logaritmi.

$$log_a(a^x) = x \qquad\qquad a^{log_a x} = x$$

Esercizi sugli esponenziali

1) $10^3 \cdot 10^5 =$ $\qquad = 10^8$
2) $\dfrac{10^3}{10^5} =$ $\qquad = 10^{-2}$
3) $(10^3)^4 =$ $\qquad = 10^{12}$
4) $(10^3 \cdot 10^{-4})^{-2} =$ $\qquad = 10^2$

Esercizi sui logaritmi

1) $Log(6) + Log(2) =$ $\qquad = Log(12)$
2) $Log(6) - Log(2) =$ $\qquad = Log(3)$
3) $Log(3^2) =$ $\qquad = 2 \cdot Log(3)$

Esercizi sul collegamento esponenziali-logaritmi

1) $Log(10^3) =$ $\qquad = 3$
2) $10^{Log(3)} =$ $\qquad = 3$

Esercizi sulle equazioni esponenziali

1) $7 = e^x$

-- soluzione --

Calcoliamo il logaritmo naturale di entrambi i membri dell'equazione
$ln(7) = ln(e^x)$
da cui si ottiene
$ln(7) = x$.

2) $15 = e^{x-3}$

-- soluzione --

Calcoliamo il logaritmo naturale di entrambi i membri dell'equazione
$ln(15) = ln(e^{x-3})$
da cui si ottiene
$ln(15) = x - 3$
ed infine
$x = ln(15) + 3$.

3) $5 = e^{\frac{x}{2}}$

-- soluzione --

Calcoliamo il logaritmo naturale di entrambi i membri dell'equazione
$ln(5) = ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)$
da cui si ottiene
$ln(5) = \dfrac{x}{2}$
ed infine
$x = 2 \cdot ln(5)$.

4) $75 = e^{\frac{x}{x+2}}$

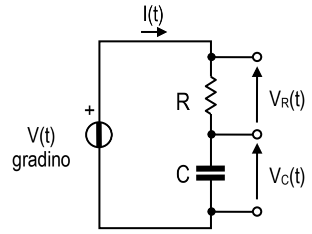
-- soluzione --

Calcoliamo il logaritmo naturale di entrambi i membri dell'equazione
$ln(75) = ln\left(e^{\frac{x}{x+2}}\right)$
da cui si ottiene
$ln(15) = \dfrac{x}{x+2}$
ed infine
$x = \dfrac{2 \cdot ln(75)}{1 - ln(75)}$.

0.2 -- Il circuito RC in risposta al gradino di tensione

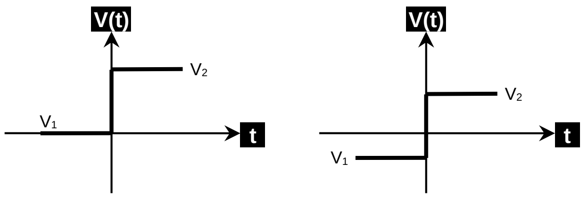
Definizione del problema

In elettronica accade spesso che un circuito RC serie sia alimentato da un gradino di tensione V(t) come rappresentato nel circuito a lato.
In questo caso la corrente nel circuito I(t) e le cadute di tensione sulla resistenza $V_R(t)$ e sul condensatore $V_C(t)$ hanno tutte un andamento di tipo esponenziale. Calcoliamo queste funzioni.

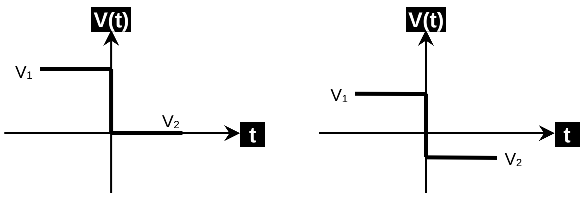


Definizione della funzione gradino. La funzione gradino consiste in una rapidissima variazione di potenziale che può consistere in un brusco aumento (gradino in salita) o in una brusca diminuzione (gradino in discesa).

- <u>Gradino in salita</u>. Si ha un gradino in salita quando il potenziale salta improvvisamente da un valore costante più basso (V_1) ad un valore costante più alto (V_2).
  La figura a lato mostra due esempi di gradino in salita, in entrambi i casi la tensione di partenza V_1 ha valore più basso della tensione di arrivo V_2.



- <u>Gradino in discesa</u>. Si ha un gradino in discesa quando il potenziale salta improvvisamente da un valore costante più alto (V_1) ad un valore costante più basso (V_2).
  La figura a lato mostra due esempi di gradino in discesa, in entrambi i casi la tensione di partenza V_1 ha valore più alto della tensione di arrivo V_2.



Dunque, se in ingresso abbiamo una funzione gradino V(t), le forme d'onda delle variabili di uscita $V_C(t)$, $V_R(t)$ e I(t), <u>per t>0</u>, sono tutte calcolabili con la seguente formula (che non dimostriamo):

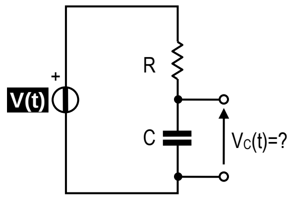
$$Y(t) = Y_{FIN} - (Y_{FIN} - Y_{IN}) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \qquad dove \qquad R \cdot C = \tau \quad (costante\ di\ tempo)$$

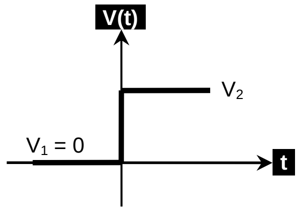
In questa formula:

- Y_{IN} indica il ***valore iniziale*** della grandezza di uscita in esame, ossia il valore che tale grandezza ha nell'istante $t=0_+$ (istante immediatamente successivo all'origine del tempo);
- Y_{FIN} indica il ***valore finale*** della grandezza di uscita in esame, ossia il valore che tale grandezza ha in un tempo pari a ∞ (istante molto lontano nel tempo).

Presentiamo ora alcuni esempi di applicazione di questa formula.

Esercizio 1





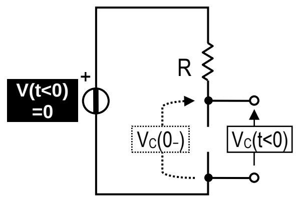
$V_C(t) = ?$

SOLUZIONE

➢ Passo 1 – Andamento di $V_C(t)$ per $t<0$

a) Disegno del circuito equivalente per $t<0$.
Al tempo $t<0$ si ha:
- la tensione di ingresso vale $V(t<0) = V_1 = 0$;
- il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto.

Si giunge così al circuito equivalente disegnato a lato.

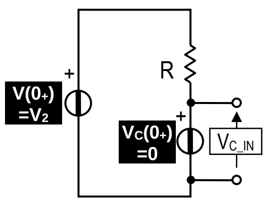
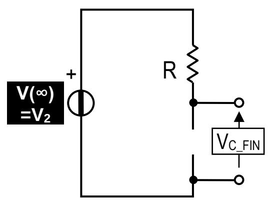


b) Calcolo di $V_C(t<0)$.
Risulta: $V_C(t<0) = 0$.

c) Calcolo di $V_C(0_-)$ -- calcolo utile per il passo 2.
Risulta: $V_C(0_-) = 0$.

➢ Passo 2 -- Andamento di $V_C(t)$ per $t>0$

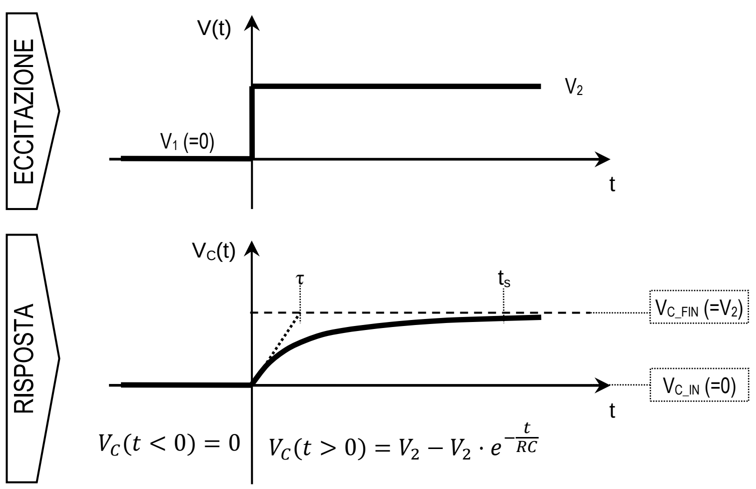
Scriviamo la formula base $V_C(t>0) = V_{C\_FIN} - \left(V_{C\_FIN} - V_{C\_IN}\right) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$.
Calcoliamo i valori di V_{C_IN} e V_{C_FIN} .

Calcolo di V_{C_IN} --- ossia $V_C(0_+)$	Calcolo di V_{C_FIN} --- ossia $V_C(\infty)$
a) Disegno del circ. eq. per $t=0_+$. Al tempo $t=0_+$ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(0_+) = V_2$; • il condensatore, per il principio di conservazione della carica, ha ai suoi capi la stessa tensione che aveva in $t=0_-$. Osservando il circuito disegnato al passo 1 si ha $V_C(0_-) = 0$, quindi: $V_C(0_+) = V_C(0_-) = 0$. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{C_IN} .** Risulta: $V_{C\_IN} = 0$.	**Disegno del circ. eq. per $t \rightarrow \infty$.** Al tempo $t \rightarrow \infty$ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(\infty) = V_2$; • il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{C_FIN} .** Risulta: $V_{C\_FIN} = V_2$.

Inserendo nella formula base i valori di V_{C_IN} e V_{C_FIN} appena trovati, si ottiene:

$$V_C(t>0) = V_2 - (V_2 - 0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad = V_2 - V_2 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \; .$$

➢ Passo 3 -- Disegno del grafico completo di $V_C(t)$

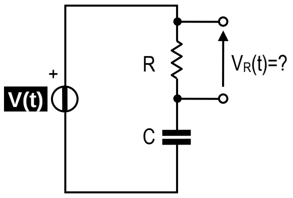


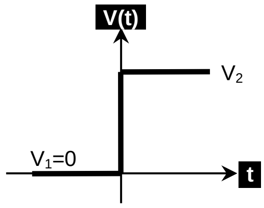
Sul grafico della risposta $V_C(t)$ si calcolano i seguenti parametri:

a) Costante di tempo: $\tau = RC$.
La costante di tempo indica l'ascissa dell'intersezione tra la retta tangente alla curva $V_C(t)$ in $t=0_+$ e l'asintoto $V_C(t)=V_{C\_FIN}$. Essa dà una misura della velocità con cui $V_C(t)$ si avvicina a V_{C_FIN} .

b) Tempo di stabilizzazione: $t_s = 5\tau$.
Il tempo di stabilizzazione indica il tempo in cui, convenzionalmente, la curva $V_C(t)$ raggiunge il suo valore asintotico V_{C_FIN} .

Esercizio 2





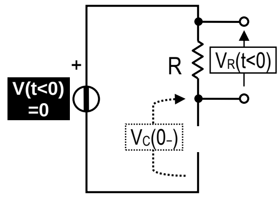
$V_R(t)$ = ?

SOLUZIONE

- Passo 1 – Andamento di $V_R(t)$ per t<0

a) Disegno del circuito equivalente per t<0 .
Al tempo t<0 si ha:
- la tensione di ingresso vale V(t<0) = V_1 = 0;
- il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto.

Si giunge così al circuito equivalente disegnato a lato.

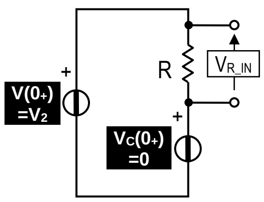
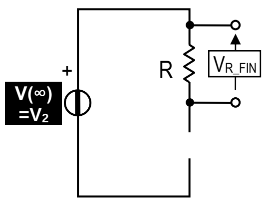


b) Calcolo di V_R(t<0).
Risulta: V_R(t<0) = 0.

c) Calcolo di $V_C(0_-)$ -- calcolo utile per il passo 2 .
Risulta: $V_C(0_-)$ = 0.

- Passo 2 – Andamento di $V_R(t)$ per t>0

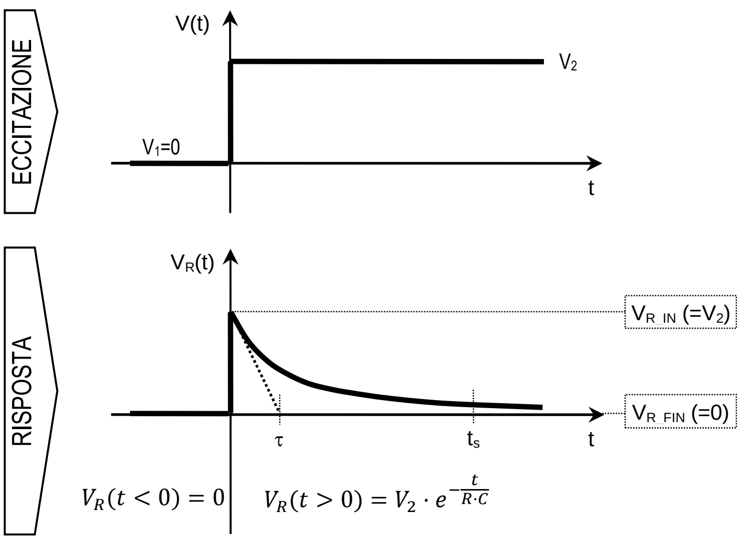
Scriviamo la formula base $V_R(t > 0) = V_{R\_FIN} - (V_{R\_FIN} - V_{R\_IN}) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$.
Calcoliamo i valori di V_{R_IN} e V_{R_FIN} .

Calcolo di V_{R_IN} --- ossia $V_R(0_+)$	Calcolo di V_{R_FIN} --- ossia $V_R(\infty)$
a) Disegno del circ. eq. per t=0_+ . Al tempo t=0_+ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(0_+) = V_2$; • il condensatore, per il principio di conservazione della carica, ha ai suoi capi la stessa tensione che aveva in t=0_-. Osservando il circuito disegnato al passo 1 si ha $V_C(0_-)$ = 0, quindi: $V_C(0_+) = V_C(0_-) = 0$ Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{R_IN} .** Risulta: $V_{R\_IN} = V_2$.	**a) Disegno del circ. eq. per t→∞ .** Al tempo t→∞ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(\infty) = V_2$; • il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{R_FIN} .** Risulta: V_{R_FIN} = 0 .

Inserendo nella formula base i valori di V_{R_IN} e V_{R_FIN} appena trovati, si ottiene:

$$V_R(t > 0) = 0 - (0 - V_2) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad = V_2 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} .$$

- Passo 3 – Disegno del grafico completo di $V_R(t)$

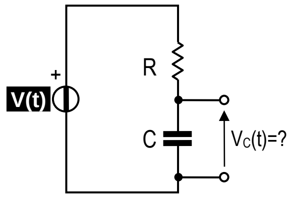


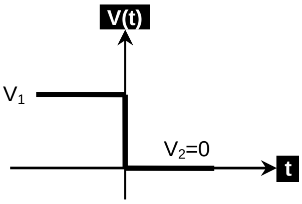
Sul grafico della risposta $V_C(t)$ si calcolano i seguenti parametri:

a) Costante di tempo: τ = RC .
La costante di tempo indica l'ascissa dell'intersezione tra la retta tangente alla curva $V_R(t)$ in t=0_+ e l'asintoto $V_R(t)$=V_{R_FIN}. Essa dà una misura della velocità con cui $V_R(t)$ si avvicina a V_{R_FIN} .

b) Tempo di stabilizzazione: t_s = 5τ .
Il tempo di stabilizzazione indica il tempo in cui, convenzionalmente, la curva $V_R(t)$ raggiunge il suo valore asintotico V_{R_FIN} .

Esercizio 3





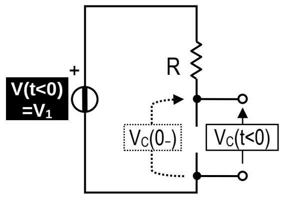
$V_C(t)$ = ?

SOLUZIONE

- Passo 1 -- Andamento di $V_C(t)$ per t<0

a) Disegno del circuito equivalente per t<0.
Al tempo t<0 si ha:
- la tensione di ingresso vale $V(t<0) = V_1$;
- il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto.

Si giunge così al circuito equivalente disegnato a lato.

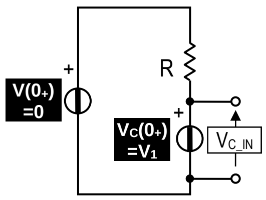
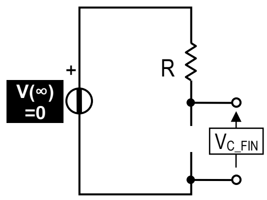


b) Calcolo di $V_C(t<0)$.
Risulta: $V_C(t<0) = V_1$.

c) Calcolo di $V_C(0_-)$ -- calcolo utile per il passo 2.
Risulta: $V_C(0_-) = V_1$.

- Passo 2 – Andamento di $V_C(t)$ per t>0

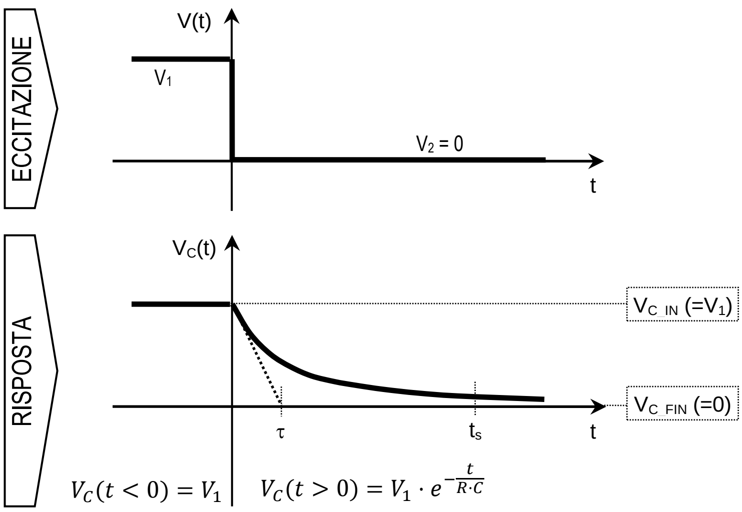
Scriviamo la formula base $V_C(t>0) = V_{C\_FIN} - \left(V_{C\_FIN} - V_{C\_IN}\right) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$.
Calcoliamo i valori di V_{C_IN} e V_{C_FIN} .

Calcolo di V_{C_IN} --- ossia $V_C(0_+)$	Calcolo di V_{C_FIN} --- ossia $V_C(\infty)$
a) Disegno del circ. eq. per t=0_+ . Al tempo t=0_+ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(0_+) = V_2 = 0$; • il condensatore, per il principio di conservazione della carica, ha ai suoi capi la stessa tensione che aveva in t=0_-. Osservando il circuito disegnato al passo 1 si ha $V_C(0_-) = V_1$, quindi: $V_C(0_+) = V_C(0_-) = V_1$ Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{C_IN} .** Risulta: $V_{C\_IN} = V_1$.	**Disegno del circ. eq. per t→∞ .** Al tempo t→∞ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(\infty) = V_2 = 0$; • il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{C_FIN} .** Risulta: $V_{C\_FIN} = 0$.

Inserendo nella formula base i valori di V_{C_IN} e V_{C_FIN} appena trovati si ottiene:

$$V_C(t>0) = 0 - (0 - V_1) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad = V_1 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \ .$$

- Passo 3 – Disegno del grafico completo di $V_C(t)$

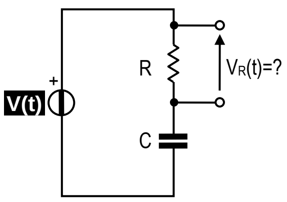


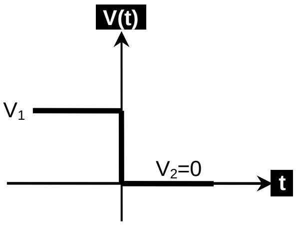
Sul grafico della risposta $V_C(t)$ si calcolano i seguenti parametri:

a) Costante di tempo: $\tau = RC$.
La costante di tempo indica l'ascissa dell'intersezione tra la retta tangente alla curva $V_C(t)$ in t=0_+ e l'asintoto $V_C(t)=V_{C\_FIN}$. Essa dà una misura della velocità con cui $V_C(t)$ si avvicina a V_{C_FIN} .

b) Tempo di stabilizzazione: $t_s = 5\tau$.
Il tempo di stabilizzazione indica il tempo in cui, convenzionalmente, la curva $V_C(t)$ raggiunge il suo valore asintotico V_{C_FIN} .

Esercizio 4





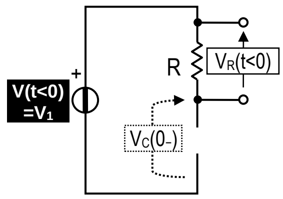
$V_R(t) = ?$

SOLUZIONE

- Passo 1 – Andamento di $V_R(t)$ per t<0

a) Disegno del circuito equivalente per t<0 .
Al tempo t<0 si ha:
- la tensione di ingresso vale $V(t<0) = V_1$;
- il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto.

Si giunge così al circuito equivalente disegnato a lato.

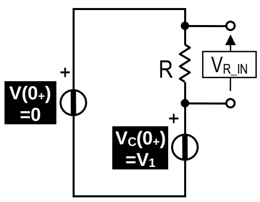
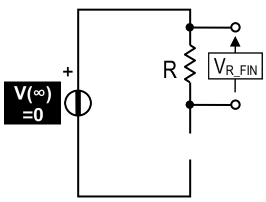


b) Calcolo di $V_R(t<0)$.
Risulta: $V_R(t<0) = 0$.

c) Calcolo di $V_C(0_-)$ -- calcolo utile per il passo 2.
Risulta: $V_C(0_-) = V_1$.

- Passo 2 – Andamento di $V_R(t)$ per t>0

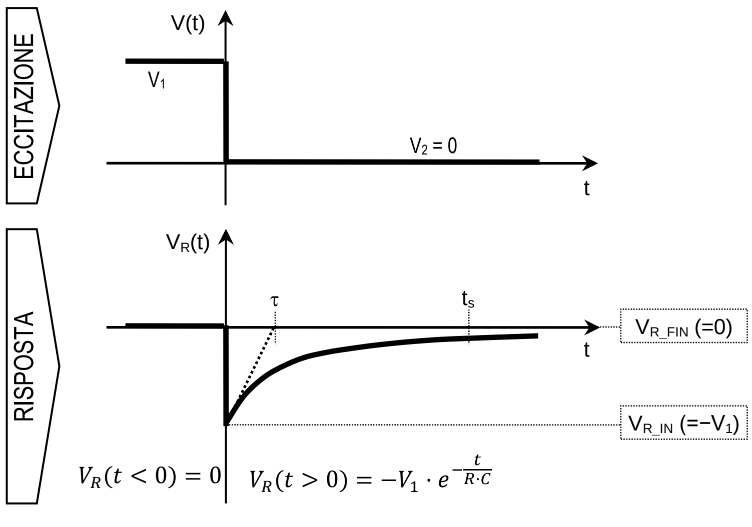
Scriviamo la formula base $V_R(t>0) = V_{R\_FIN} - (V_{R\_FIN} - V_{R\_IN}) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$.
Calcoliamo i valori di V_{R_IN} e V_{R_FIN} .

Calcolo di V_{R_IN} --- ossia $V_R(0_+)$	Calcolo di V_{R_FIN} --- ossia $V_R(\infty)$
a) Disegno del circ. eq. per t=0₊ . Al tempo $t=0_+$ si ha: ◆ la tensione di ingresso vale: $V(0_+) = V_2 = 0$; ◆ il condensatore, per il principio di conservazione della carica, ha ai suoi capi la stessa tensione che aveva in $t=0_-$. Osservando il circuito disegnato al passo 1 si ha $V_C(0_-) = V_1$, quindi: $V_C(0_+) = V_C(0_-) = V_1$. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{R_IN} .** Risulta: $V_{R\_IN} = -V_1$.	**Disegno del circ. eq. per t→∞ .** Al tempo t→∞ si ha: ◆ la tensione di ingresso vale $V(\infty) = V_2 = 0$; ◆ il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{R_FIN} .** Risulta: $V_{R\_FIN} = 0$.

Inserendo nella formula base i valori di V_{R_IN} e V_{R_FIN} appena trovati si ottiene:

$$V_R(t>0) = 0 - (0 + V_1) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad = -V_1 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad .$$

- Passo 3 – Disegno del grafico completo di $V_R(t)$

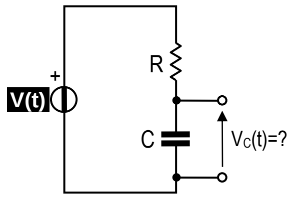


Sul grafico della risposta $V_R(t)$ si calcolano i seguenti parametri:

a) Costante di tempo: $\tau = RC$.
La costante di tempo indica l'ascissa dell'intersezione tra la retta tangente alla curva $V_R(t)$ in $t=0_+$ e l'asintoto $V_R(t)=V_{R\_FIN}$. Essa dà una misura della velocità con cui $V_R(t)$ si avvicina a V_{R_FIN} .

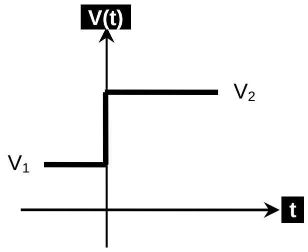
b) Tempo di stabilizzazione: $t_s = 5\tau$.
Il tempo di stabilizzazione indica il tempo in cui, convenzionalmente, la curva $V_R(t)$ raggiunge il suo valore asintotico V_{R_FIN} .

Esercizio 5



Dati
R = 10 KΩ
C = 8 μF
V(t) = gradino di tensione riportato a lato con:
V_1 = 2 V
V_2 = 5 V

Quesiti
Equazione e grafico della tensione $V_C(t)$.



SOLUZIONE

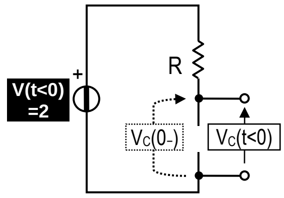
➢ Passo 1 – Andamento di $V_C(t)$ per t<0

a) Disegno del circuito equivalente per t<0.
Per il tempo t<0 si ha:
- la tensione di ingresso vale $V(t<0) = V_1 = 2$;
- il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto.

Si giunge così al circuito equivalente disegnato a lato.

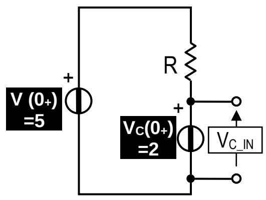
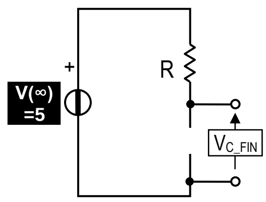
b) Calcolo di $V_C(t<0)$.
Risulta: $V_C(t<0) = 2$.

c) Calcolo di $V_C(0_-)$ -- calcolo utile per il passo 2.
Risulta: $V_C(0_-) = 2$.



➢ Passo 2 – Andamento di $V_C(t)$ per t>0

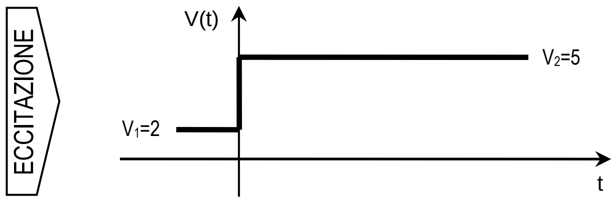
Scriviamo la formula base $V_C(t>0) = V_{C\_FIN} - (V_{C\_FIN} - V_{C\_IN}) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$.
Calcoliamo i valori di V_{C_IN} e V_{C_FIN} .

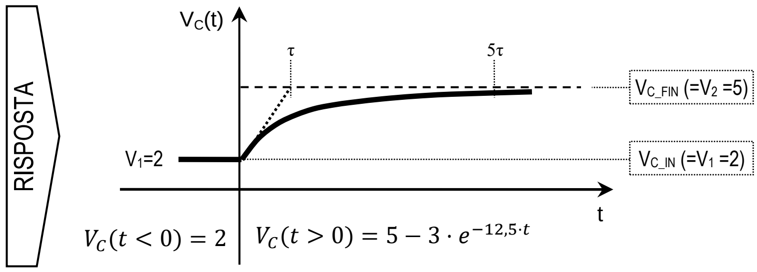
Calcolo di V_{C_IN} --- ossia $V_C(0_+)$	Calcolo di V_{C_FIN} --- ossia $V_C(\infty)$
a) Disegno del circ. eq. per t=0_+ . Al tempo t=0_+ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(0_+) = V_2 = 5$; • il condensatore, per il principio di conservazione della carica, ha ai suoi capi la stessa tensione che aveva in t=0_-. Osservando il circuito disegnato al passo 1 si ha $V_C(0_-) = 2$, quindi: $V_C(0_+) = V_C(0_-) = 2$. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{C_IN} .** Risulta: $V_{C\_IN} = 2$.	**a) Disegno del circ. eq. per t⟶∞ .** Al tempo t⟶∞ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(\infty) = V_2 = 5$; • il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{C_FIN} .** Risulta: $V_{C\_FIN} = V_2 = 5$.

Inserendo nella formula base i valori di V_{C_IN} e V_{C_FIN} appena trovati, si ottiene:

$$V_C(t>0) = 5 - (5-2) \cdot e^{-12{,}5 \cdot t} \quad = 5 - 3 \cdot e^{-12{,}5 \cdot t} \; .$$

➢ Passo 3 – Disegno del grafico completo di $V_C(t)$



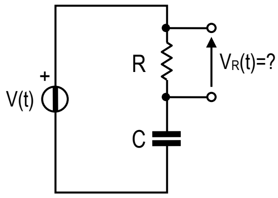


Sul grafico della risposta $V_C(t)$ si calcolano i seguenti parametri:

a) Costante di tempo: τ = RC .
La costante di tempo indica l'ascissa dell'intersezione tra la retta tangente alla curva $V_C(t)$ in t=0_+ e l'asintoto $V_C = V_{C\_FIN}$. Essa dà una misura della velocità con cui $V_C(t)$ si avvicina a V_{C_FIN} .

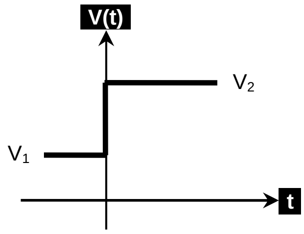
b) Tempo di stabilizzazione: $t_s = 5\tau$.
Il tempo di stabilizzazione indica il tempo in cui, convenzionalmente, la curva $V_C(t)$ raggiunge il suo valore asintotico V_{C_FIN} .

Esercizio 6



<u>Dati</u>
R = 10 KΩ
C = 8 μF
V(t) = gradino di tensione riportato a lato con:
V_1 = 2 V
V_2 = 5 V

<u>Quesiti</u>
Equazione e grafico della corrente $V_R(t)$.



SOLUZIONE

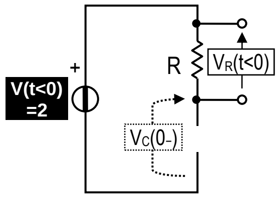
➢ Passo 1 – Andamento di $V_R(t)$ per t<0

a) Disegno del circuito equivalente per t<0 .
Per il tempo t<0 si ha:
- la tensione di ingresso vale V(t<0) = V_1 = 2;
- il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto.

Si giunge così al circuito equivalente disegnato a lato.

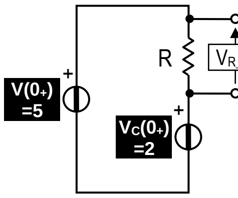
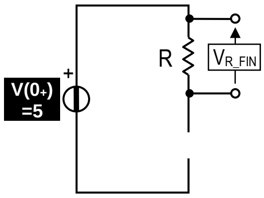
b) Calcolo di V_R(t<0).
Risulta: $V_R(t<0) = 0$.

c) Calcolo di $V_C(0_-)$ -- calcolo utile per il passo 2 .
Risulta: $V_C(0_-) = 2$.



➢ Passo 2 - Andamento di $V_R(t)$ per t>0

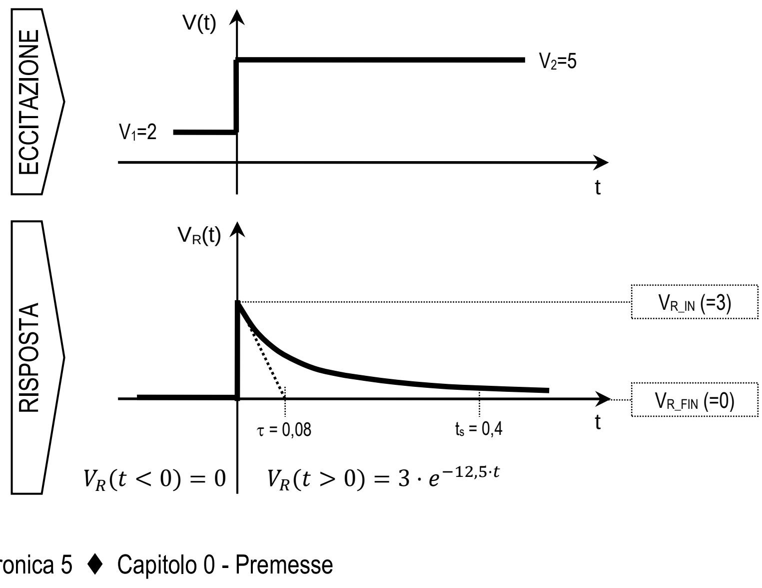
Scriviamo la formula base $V_R(t>0) = V_{R\_FIN} - \left(V_{R\_FIN} - V_{R\_IN}\right) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$.
Calcoliamo i valori di V_{R_IN} e V_{R_FIN} .

Calcolo di V_{R_IN} --- ossia $V_R(0_+)$	Calcolo di V_{R_FIN} --- ossia $V_R(\infty)$
a) Disegno del circ. eq. per t=0₊ . Al tempo t=0_+ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(0_+) = V_2 = 5$; • il condensatore, per il principio di conservazione della carica, ha ai suoi capi la stessa tensione che aveva in t=0_-. Osservando il circuito disegnato al passo 1 si ha $V_C(0_-) = 2$, quindi: $V_C(0_+) = V_C(0_-) = 2$. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{R_IN} .** Risulta: $V_{R\_IN} = 3$.	**a) Disegno del circ. eq. per t→∞ .** Al tempo t→∞ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(\infty) = V_2$; • il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{R_FIN} .** Risulta: $V_{R\_FIN} = 0$.

Inserendo nella formula base i valori di I_{IN} e I_{FIN} appena trovati, si ottiene:

$$V_R(t>0) = 0 - (0-3) \cdot e^{-12{,}5 \cdot t} \quad = 3 \cdot e^{-12{,}5 \cdot t} \;.$$

➢ Passo 3 – Disegno del grafico completo di $V_R(t)$

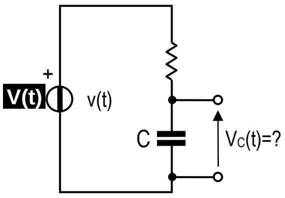


Sul grafico della risposta $V_R(t)$ si calcolano i seguenti parametri:

a) <u>Costante di tempo</u>: τ = RC = 0,08 .
La costante di tempo indica l'ascissa dell'intersezione tra la retta tangente alla curva $V_R(t)$ in t=0_+ e l'asintoto $V_R(t)=V_{R\_FIN}$. Essa dà una misura della velocità con cui $V_R(t)$ si avvicina a V_{R_FIN} .

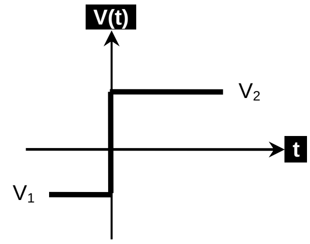
b) <u>Tempo di stabilizzazione</u>: $t_s = 5\tau = 0{,}4$.
Il tempo di stabilizzazione indica il tempo in cui, convenzionalmente, la curva $V_R(t)$ raggiunge il suo valore asintotico V_{R_FIN} .

Esercizio 7



Dati
R = 10 KΩ
C = 8 μF
V(t) = gradino di tensione riportato a lato con:
$V_1 = -2$ V
$V_2 = 5$ V

Quesiti
1) Equazione e grafico della tensione $V_C(t)$.
2) Valore della tensione $V_C(t)$ nell'istante t=0,25 sec.
3) Tempo in cui la tensione $V_C(t)$ raggiunge il valore di 3 V.



SOLUZIONE QUESITO 1

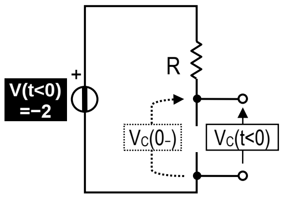
- Passo 1 – Andamento di $V_C(t)$ per t<0

a) Disegno del circuito equivalente per t<0 .
Per il tempo t<0 si ha:
- la tensione di ingresso vale $V(t<0) = V_1 = -2$;
- il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto.

Si giunge così al circuito equivalente disegnato a lato.

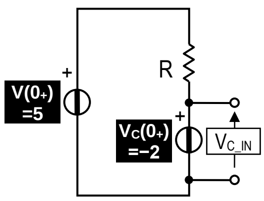
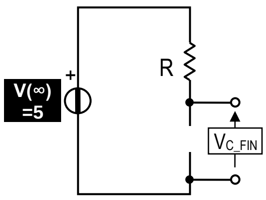
b) Calcolo di VC(t<0).
Risulta: $V_C(t<0) = -2$.

c) Calcolo di $V_C(0_-)$ -- calcolo utile per il passo 2.
Risulta: $V_C(0_-) = -2$.



- Passo 2 – Andamento di $V_C(t)$ per t>0

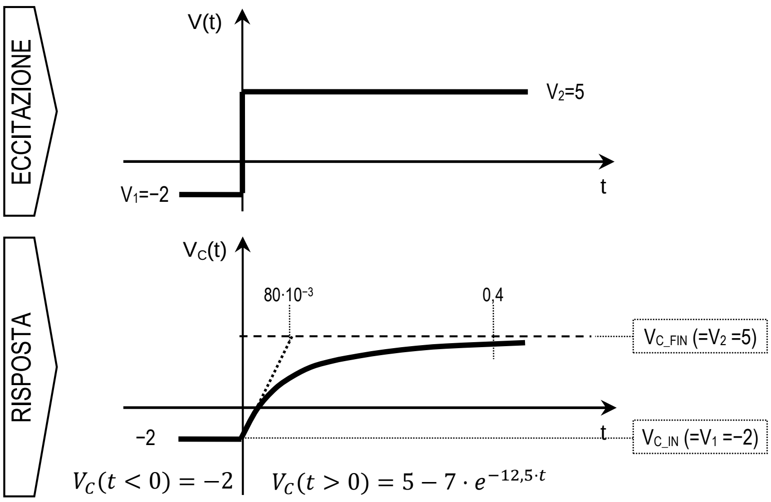
Scriviamo la formula base $V_C(t>0) = V_{C\_FIN} - \left(V_{C\_FIN} - V_{C\_IN}\right) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$.
Calcoliamo i valori di V_{C_IN} e V_{C_FIN} .

Calcolo di V_{C_IN} --- ossia $V_C(0_+)$	Calcolo di V_{C_FIN} --- ossia $V_C(\infty)$
a) Disegno del circ. eq. per t=0₊ . Al tempo $t=0_+$ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(0_+) = V_2 = 5$; • il condensatore, per il principio di conservazione della carica, ha ai suoi capi la stessa tensione che aveva in $t=0_-$. Osservando il circuito disegnato al passo 1 si ha $V_C(0_-) = -2$, quindi: $V_C(0_+) = V_C(0_-) = -2$. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{C_IN} .** Risulta: $V_{C\_IN} = -2$.	**Disegno del circ. eq. per $t \to \infty$.** Al tempo $t \to \infty$ si ha: • la tensione di ingresso vale: $V(\infty) = V_2 = 5$; • il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{C_FIN} .** Risulta: $V_{C\_FIN} = 5$.

Inserendo nella formula base i valori di V_{C_IN} e V_{C_FIN} appena trovati, si ottiene:

$$V_C(t>0) = 5 - (5+2) \cdot e^{-12{,}5 \cdot t} \quad = 5 - 7 \cdot e^{-12{,}5 \cdot t} \; .$$

- Passo 3 – Disegno del grafico completo di $V_C(t)$

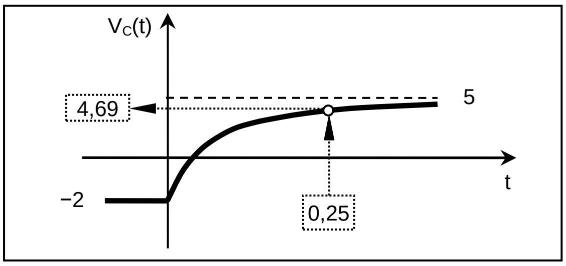


Sul grafico della risposta $V_C(t)$ si calcolano i seguenti parametri:

a) Costante di tempo: $\tau = RC = 0{,}08$.
La costante di tempo indica l'ascissa dell'intersezione tra la retta tangente alla curva $V_C(t)$ in $t=0_+$ e l'asintoto $V_C=V_{C\_FIN}$. Essa dà una misura della velocità con cui $V_C(t)$ si avvicina a V_{C_FIN} .

b) Tempo di stabilizzazione: $t_s = 5\tau = 0{,}4$.
Il tempo di stabilizzazione indica il tempo in cui, convenzionalmente, la curva $V_C(t)$ raggiunge il suo valore asintotico V_{C_FIN} .

SOLUZIONE QUESITO 2



Abbiamo trovato che la tensione $V_C(t>0)$ ha equazione

$$V_C(t) = 5 - 7 \cdot e^{-(12{,}5)\cdot(t)} .$$

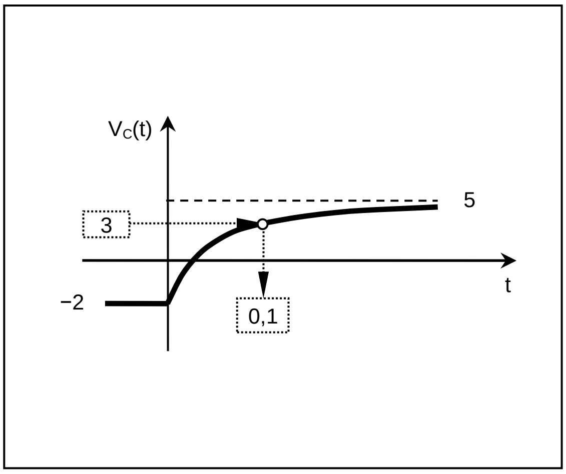
Se al tempo t diamo il valore t=0,25 si ha che

$$V_C(t) = 5 - 7 \cdot e^{-(12{,}5)\cdot(0{,}25)} .$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$V_C(t) = 4{,}69 \ .$$

SOLUZIONE QUESITO 3



Abbiamo trovato che la tensione $V_C(t>0)$ ha equazione

$$V_C(t) = 5 - 7 \cdot e^{-(12{,}5)\cdot(t)} .$$

Il valore di tensione $V_C=3$ si ottiene al tempo che soddisfa l'equazione

$$3 = 5 - 7 \cdot e^{-(12{,}5)\cdot(t)} \ .$$

Per risolvere questa equazione si procede come segue:
a) si isola l'esponenziale

$$\frac{2}{7} = e^{-(12{,}5)\cdot(t)}$$

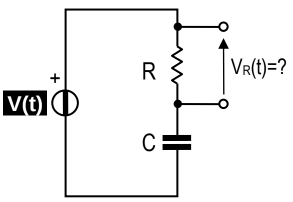
b) si calcola il logaritmo naturale di entrambi i membri

$$ln\left(\frac{2}{7}\right) = -12{,}5 \cdot t$$

c) si calcola il valore del tempo t

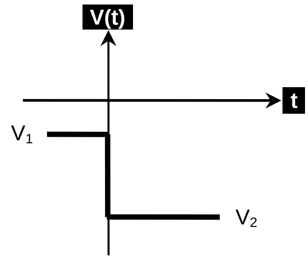
$$t = 0{,}1 \ .$$

Esercizio 8



Dati
R = 10 KΩ
C = 15 μF
V(t) = gradino di tensione riportato a lato con:
$V_1 = -2$ V
$V_2 = -5$ V

Quesiti
1) Equazione e grafico della tensione $V_R(t)$.
2) Valore della tensione $V_R(t)$ nell'istante t=0,3 sec.
3) Tempo in cui la tensione $V_R(t)$ raggiunge il valore di −2 V.

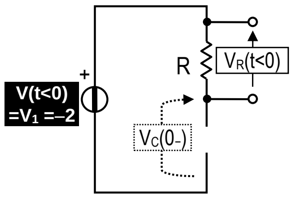


SOLUZIONE QUESITO 1

- Passo 1 – Andamento di $V_R(t)$ per t<0

a) Disegno del circuito equivalente per t<0 .
Al tempo t<0 si ha:
- la tensione di ingresso vale $V(t<0) = V_1 = -2$;
- il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto.

Si giunge così al circuito equivalente disegnato a lato.

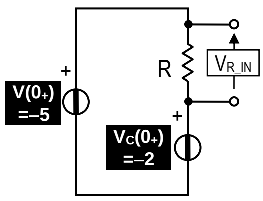
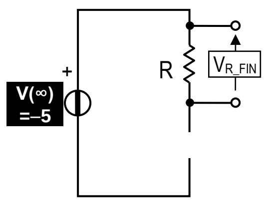


b) Calcolo di $V_R(t<0)$.
Risulta: $V_R(t<0) = 0$.

c) Calcolo di $V_C(0_-)$ -- calcolo utile per il passo 2.
Risulta: $V_C(0_-) = -2$.

- Passo 2 – Andamento di $V_R(t)$ per t>0

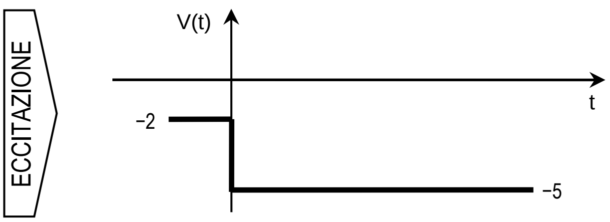
Scriviamo la formula base $V_R(t>0) = V_{R\_FIN} - \left(V_{R\_FIN} - V_{R\_IN}\right) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$.
Calcoliamo i valori di V_{R_IN} e V_{R_FIN} .

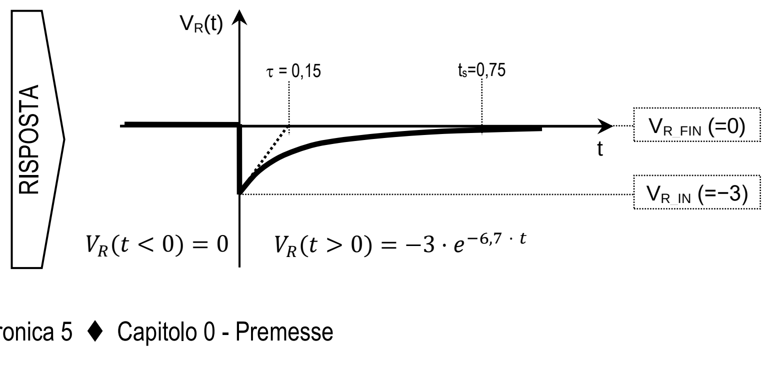
Calcolo di V_{R_IN} --- ossia $V_R(0_+)$	Calcolo di V_{R_FIN} --- ossia $V_R(\infty)$
a) Disegno del circ. eq. per t=0₊ . Al tempo $t=0_+$ si ha: ◆ la tensione di ingresso vale: $V(0_+) = -5$; ◆ il condensatore, per il principio di conservazione della carica, ha ai suoi capi la stessa tensione che aveva in $t=0_-$. Osservando il circuito disegnato al passo 1 si ha $V_C(0_-) = -2$, quindi: $V_C(0_+) = V_C(0_-) = -2$. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{R_IN} .** Risulta: $V_{R\_IN} = -3$.	**a) Disegno del circ. eq. per t→∞ .** Al tempo t→∞ si ha: ◆ la tensione di ingresso vale: $V(\infty) = -5$; ◆ il condensatore, poichè siamo in regime costante, si comporta come un circuito aperto. Si giunge così al c. e. disegnato a lato.  **b) Calcolo di V_{R_FIN} .** Risulta: $V_{R\_FIN} = 0$.

Inserendo nella formula base i valori di V_{R_IN} e V_{R_FIN} appena trovati si ottiene:

$$V_R(t>0) = 0 - (0+3) \cdot e^{-6{,}7 \cdot t} \quad = -3 \cdot e^{-6{,}7 \cdot t} \ .$$

- Passo 3 – Disegno del grafico completo di $V_R(t)$





Sul grafico della risposta $V_R(t)$ si calcolano i seguenti parametri:

a) Costante di tempo: $\tau = RC = 0{,}15$.
La costante di tempo indica l'ascissa dell'intersezione tra la retta tangente alla curva $V_R(t)$ in $t=0_+$ e l'asintoto $V_R = V_{R\_FIN}$. Essa dà una misura della velocità con cui $V_R(t)$ si avvicina a V_{R_FIN} .

b) Tempo di stabilizzazione: $t_s = 5\tau = 0{,}75$.
Il tempo di stabilizzazione indica il tempo in cui, convenzionalmente, la curva $V_R(t)$ raggiunge il suo valore asintotico V_{R_FIN} .

SOLUZIONE QUESITO 2

Abbiamo trovato che la tensione $V_R(t)$ ha equazione

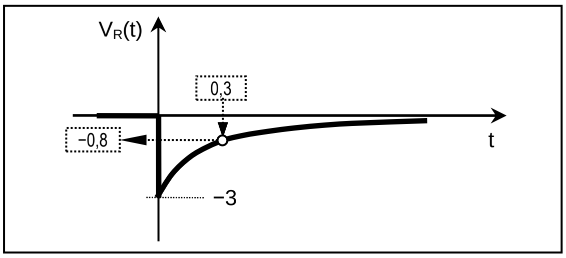
$V_R(t>0) = -3 \cdot e^{-(6,7)\cdot(t)}$.

Se al tempo t diamo il valore t=0,3 si ha che

$V_R(t) = -3 \cdot e^{-(6,7)\cdot(0,3)}$.

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$V_R(t) = -0,4$.



SOLUZIONE QUESITO 3

Abbiamo trovato che la tensione $V_R(t)$ ha equazione

$V_R(t>0) = -3 \cdot e^{-(6,7)\cdot(t)}$.

Il valore di tensione $V_R=-2$ si ottiene al tempo che soddisfa l'equazione

$-2 = -3 \cdot e^{-(6,7)\cdot(t)}$.

Per risolvere questa equazione si procede come segue:

a) si isola l'esponenziale

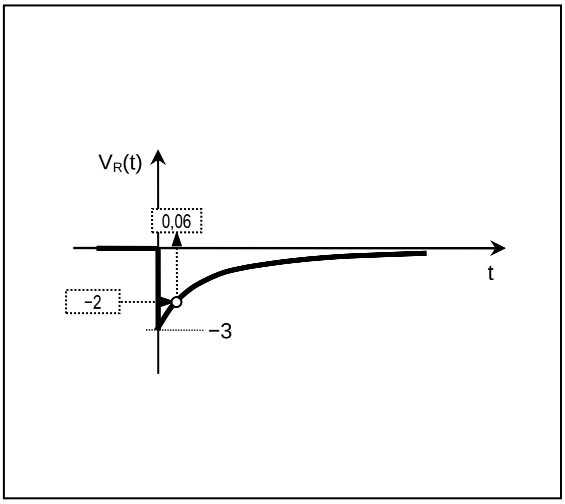
$\frac{2}{3} = e^{-(6,7)\cdot(t)}$

b) si calcola il logaritmo naturale di entrambi i membri

$ln\left(\frac{2}{3}\right) = -6,7 \cdot t$

c) si calcola il valore del tempo t

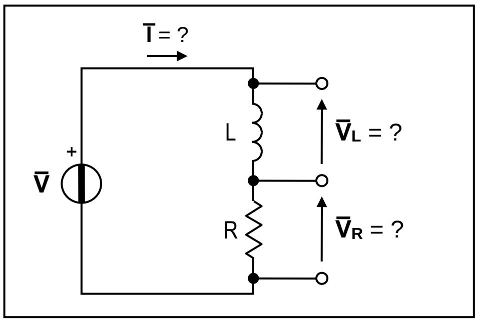
$t = 0,06$.



0.3 -- I diagrammi di Bode[1]

Definizione del problema

Consideriamo il circuito a lato funzionante in regime sinusoidale, e quindi studiato con il metodo dei numeri complessi.
La tensione $\overline{V}$ (detta *variabile di ingresso*) eccita il circuito provocando in esso l'insorgere di altre grandezze elettriche come $\overline{I}$, $\overline{V}_L$, $\overline{V}_R$ (dette *variabili di uscita*).
Applicando i principi di Kirchhoff si trova che le relazioni esistenti tra la variabile di ingresso $\overline{V}$ e le variabili di uscita $\overline{I}$, $\overline{V}_L$, $\overline{V}_R$ sono espresse dalle formule seguenti (tralasciamo i passaggi matematici utilizzati allo scopo).



$$\overline{I} = \frac{1}{R + j\omega L} \cdot \overline{V}$$ in forma grafica $$\overline{V} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{R + j\omega L}} \longrightarrow \overline{I}$$

dove
- $\overline{V}$: variabile di ingresso
- $\overline{I}$: variabile di uscita
- $\dfrac{1}{R + j\omega L}$: FdT in regime sinusoidale

$$\overline{V}_L = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \cdot \overline{V}$$ in forma grafica $$\overline{V} \longrightarrow \boxed{\frac{j\omega L}{R + j\omega L}} \longrightarrow \overline{V}_L$$

dove
- $\overline{V}$: variabile di ingresso
- $\overline{V}_L$: variabile di uscita
- $\dfrac{j\omega L}{R + j\omega L}$: FdT in regime sinusoidale

$$\overline{V}_R = \frac{R}{R + j\omega L} \cdot \overline{V}$$ in forma grafica $$\overline{V} \longrightarrow \boxed{\frac{R}{R + j\omega L}} \longrightarrow \overline{V}_R$$

dove
- $\overline{V}$: variabile di ingresso
- $\overline{V}_R$: variabile di uscita
- $\dfrac{R}{R + j\omega L}$: FdT in regime sinusoidale

Tutte queste equazioni possono essere indicate genericamente con la scrittura:

$$\overline{Y} = \overline{A}(j\omega) \cdot \overline{X}$$ in forma grafica $$\overline{X} \longrightarrow \boxed{\overline{A}(j\omega)} \longrightarrow \overline{Y}$$

dove
- $\overline{X}$: variabile di ingresso
- $\overline{Y}$: variabile di uscita
- $\overline{A}(j\omega)$: FdT in regime sinusoidale

La funzione appena scritta, espressa in forma polare, diventa:

$$|\overline{Y}| \cdot e^{j\angle\overline{Y}} = \left(|\overline{A}(j\omega)| \cdot e^{j\angle\overline{A}(j\omega)}\right) \cdot \left(|\overline{X}| \cdot e^{j\angle\overline{X}}\right)$$

ossia

$$|\overline{Y}| \cdot e^{j\angle\overline{Y}} = \left(|\overline{A}(j\omega)| \cdot |\overline{X}|\right) \cdot e^{j\cdot(\angle\overline{A}(j\omega)+\angle\overline{X})} \; .$$

Questa equazione complessa si traduce nelle due seguenti equazioni reali:

1)	Uguaglianza dei moduli $|\overline{Y}| = |\overline{A}(j\omega)| \cdot |\overline{X}|$	ossia	Il modulo dell'uscita $|\overline{Y}|$ si calcola moltiplicando il modulo dell'ingresso $|\overline{X}|$ per il modulo della funzione di trasferimento $|\overline{A}(j\omega)|$ il cui valore dipende dalla pulsazione ω.
2)	Uguaglianza degli argomenti $\angle\overline{Y} = \angle\overline{A}(j\omega) + \angle\overline{X}$	ossia	L'argomento dell'uscita $\angle\overline{Y}$ si calcola sommando l'argomento dell'ingresso $\angle\overline{X}$ con l'argomento della funzione di trasferimento $\angle\overline{A}(j\omega)$ il cui valore dipende dalla pulsazione ω.

Da ciò si capisce quanto sia importante conoscere la funzione di trasferimento $\overline{A}(j\omega)$; infatti, conoscendo $\overline{A}(j\omega)$, e l'ingresso $\overline{X}$, siamo in grado di calcolare l'uscita $\overline{Y}$.

I diagrammi di Bode sono la rappresentazione grafica asintotica del modulo e della fase della funzione di trasferimento in regime sinusoidale $\overline{A}(j\omega)$ in funzione della pulsazione ω.

[1] Presenteremo i diagrammi di Bode solo per funzioni di trasferimento con poli e zeri reali positivi, pertanto trascureremo il caso dei poli e zeri complessi coniugati.

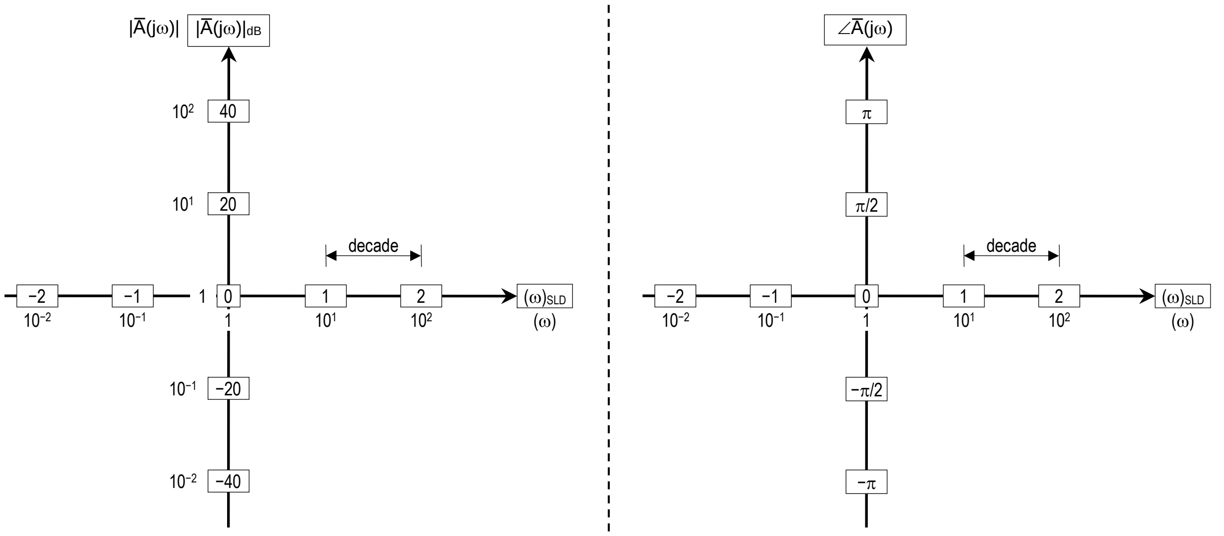
Piani cartesiani utilizzati per tracciare i diagrammi di Bode

Piano cartesiano utilizzato per rappresentare il modulo

ascissa .... pulsazione in scala logaritmica decimale → simbolo $(\omega)_{SLD}$
ordinata ... modulo della FdT in decibel → simbolo $|\overline{A}(j\omega)|_{dB}$

Piano cartesiano utilizzato per rappresentare la fase

ascissa .... pulsazione in scala logaritmica decimale → simbolo $(\omega)_{SLD}$
ordinata ... fase della FdT in radianti → simbolo $\angle\overline{A}(j\omega)$



Formule di conversione

$$(\omega)_{SLD} = Log(\omega)$$

$$\omega = 10^{(\omega)_{SLD}}$$

$$|\overline{A}(j\omega)| \rightarrow |\overline{A}(j\omega)|_{dB}$$

$$|\overline{A}(j\omega)| = 10^{\left(\frac{|\overline{A}(j\omega)|_{dB}}{20}\right)}$$

Algoritmo per disegnare i diagrammi di Bode

Per disegnare i diagrammi di Bode di una FdT in regime sinusoidale si segue l'algoritmo seguente.

1) Trascrivere la FdT in forma canonica, individuando così i suoi fattori elementari

Trascrivere la FdT in forma canonica significa scomporla nei suoi fattori elementari, che sono quelli riportati nello schema seguente.

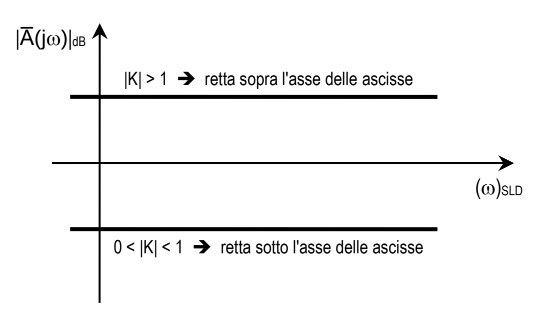
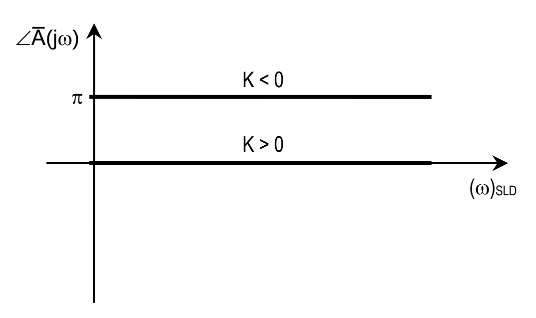
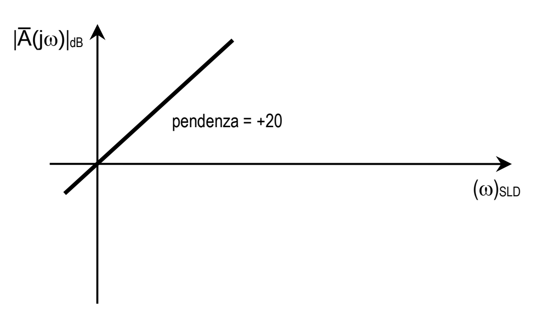
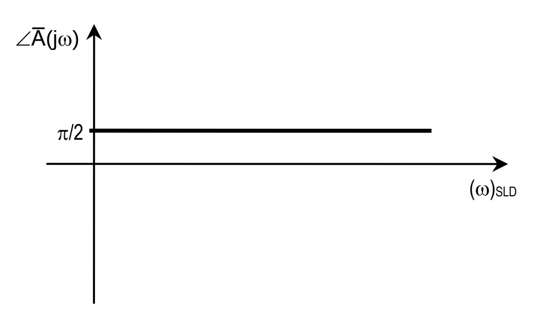
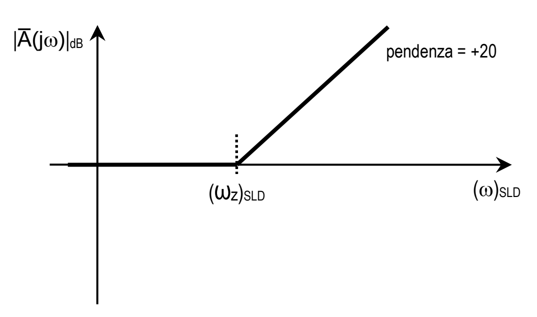
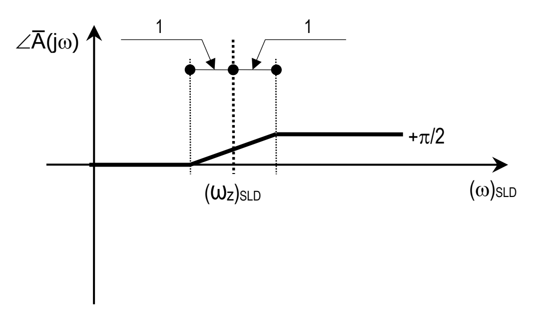
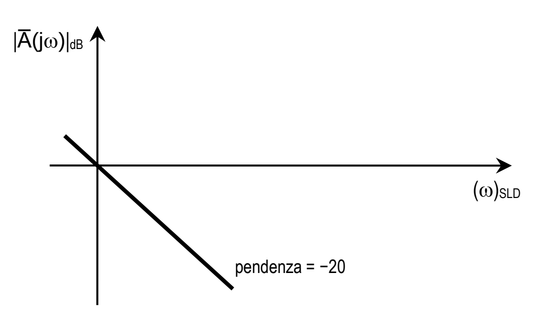
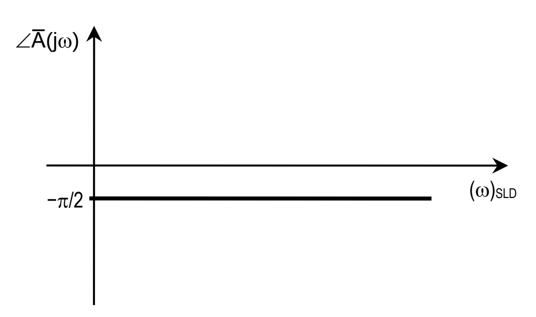
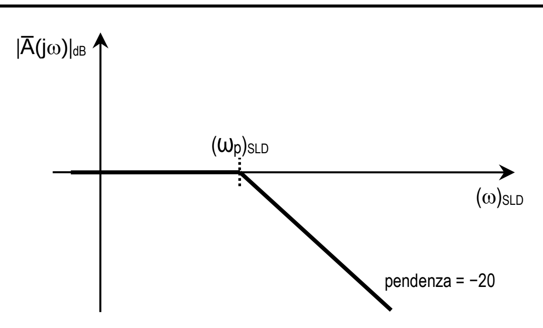
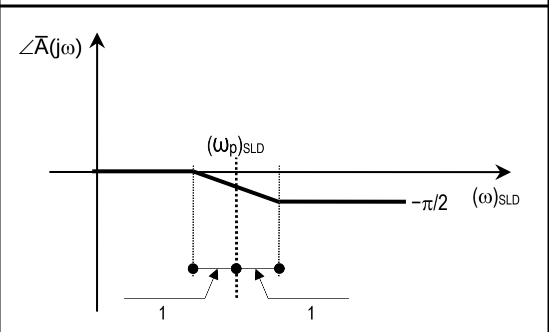
$$\underbrace{K}_{\text{costante}} \quad ; \quad \underbrace{j\omega \quad ; \quad 1 + j\omega \cdot \tau_z}_{\text{fattori che compongono il numeratore}} \quad ; \quad \underbrace{\frac{1}{j\omega} \quad ; \quad \frac{1}{1 + j\omega \cdot \tau_p}}_{\text{fattori che compongono il denominatore}}$$

A tal proposito occorre fare la seguente osservazione (che non dimostreremo): i numeri reali τ_z e τ_p (detti "*costanti di tempo*") che appaiono nei fattori riportati nell'elenco di sopra devono essere positivi. Questa condizione è necessaria affinchè il sistema sia stabile.

2) Tracciare i diagrammi di Bode di ciascun fattore, e poi sommarli tra loro ottenendo così i diagrammi di Bode dell'intera FdT

> sommando tra loro i diagrammi del modulo di ciascun fattore si ottiene il diagramma del modulo complessivo;
> sommando tra loro i diagrammi della fase di ciascun fattore si ottiene il diagramma della fase complessivo.

Diagrammi di Bode dei fattori elementari

fattore		**grafico del modulo** in ascissa è riportata la pulsazione in scala logaritmica decimale in ordinata è riportato il modulo in dB	**grafico della fase** in ascissa è riportata la pulsazione in scala logaritmica decimale in ordinata è riportata la fase in radianti
costante -- a numeratore	K -- calcolare -- $\lvert K \rvert_{db}$		
fattori in funzione di ω -- a numeratore	$j\omega$		
	$1 + j\omega \cdot \tau_z$ -- calcolare -- ω_z $(=1/\tau_z)$ $(\omega_z)_{SLD}$		
fattori in funzione di ω -- a denominatore	$\dfrac{1}{j\omega}$		
	$\dfrac{1}{1 + j\omega \cdot \tau_p}$ -- calcolare -- ω_p $(=1/\tau_p)$ $(\omega_p)_{SLD}$		

Esercizio 1

Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento in regime sinusoidale.

$$\overline{A}(j\omega) = -\frac{5}{j\omega}\ .$$

SOLUZIONE

1) Trascrivere la FdT in forma canonica, individuando così i suoi fattori elementari

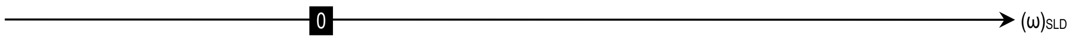
$$\overline{A}(j\omega) = -\frac{5}{j\omega} \xrightarrow{forma\ canonica} = \underbrace{(-5)}_{K} \cdot \underbrace{\frac{1}{j\omega}}_{\overline{F}_1}$$

Esaminiamo i singoli fattori.

fattore costante	**segno** positivo oppure negativo	**modulo** $\lvert K \rvert$	**modulo in decibel** $\lvert K \rvert_{dB}$
K = −5	negativo	|K| = 5	$\lvert K\rvert_{dB} = 20 \cdot Log\lvert K\rvert \ \cong 14$

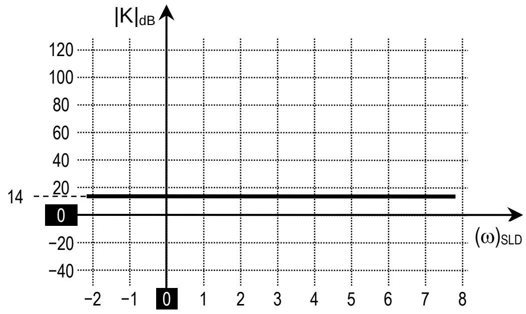
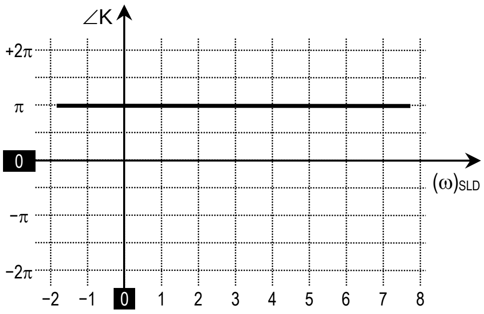
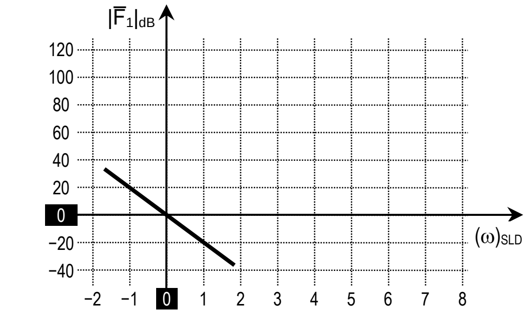
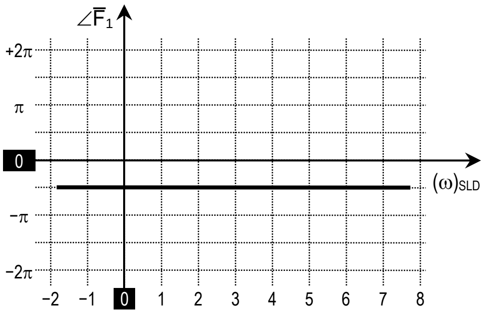
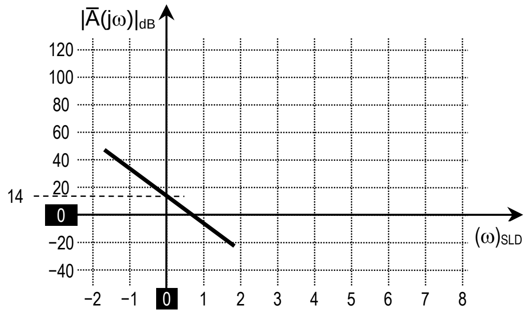
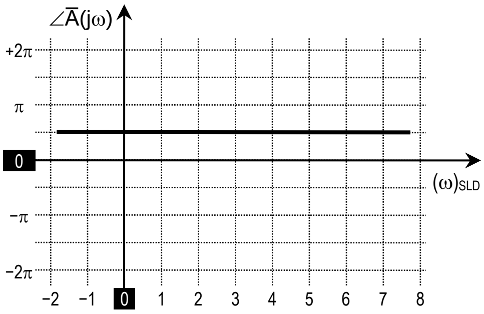
fattore funzione di jω	**costante di tempo** (τ_z) oppure (τ_p)	**pulsazione di taglio** (ω_z) oppure (ω_p)	**pulsazione di taglio in SLD** $(\omega_z)_{SLD}$ oppure $(\omega_p)_{SLD}$
$\overline{F}_1 = \frac{1}{j\omega}$			

Posizione delle pulsazioni di taglio in scala logaritmica decimale (SLD).



2) Tracciare i diagrammi di Bode di ciascun fattore, poi sommarli tra loro ottenendo così i diagrammi di Bode dell'intera FdT

<table>
<tr><th>fattore</th><th>grafico del modulo</th><th>grafico della fase</th></tr>
<tr><td>$K = -5$

$|K|_{dB} = 14$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\overline{F}_1 = \frac{1}{j\omega}$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>fdt complessiva
$K \cdot \overline{F}_1$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Esercizio 2

Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento in regime sinusoidale.

$$\overline{A}(j\omega) = \frac{10 \cdot (50 + j\omega)}{j\omega}$$

SOLUZIONE

1) Trascrivere la FdT in forma canonica, individuando così i suoi fattori elementari

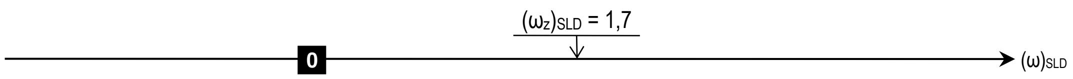
$$\overline{A}(j\omega) = \frac{10 \cdot (50 + j\omega)}{j\omega} \xrightarrow{forma\ canonica} = \underbrace{(500)}_{K} \cdot \underbrace{\left(1 + j\omega\frac{1}{50}\right)}_{\overline{F}_1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{j\omega}\right)}_{\overline{F}_2}$$

Esaminiamo i singoli fattori.

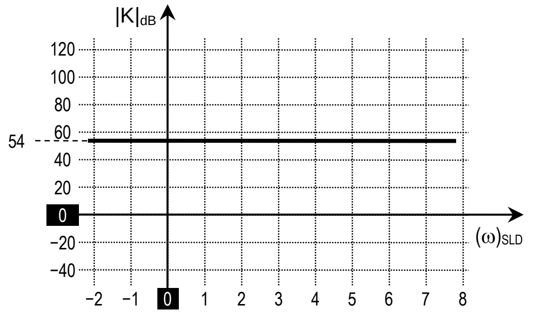
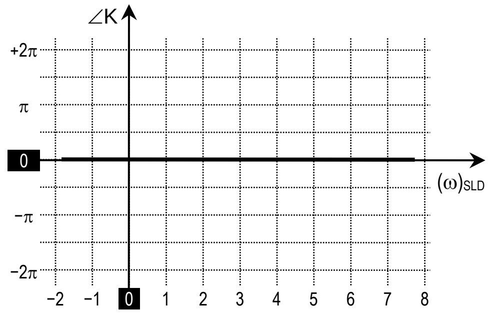
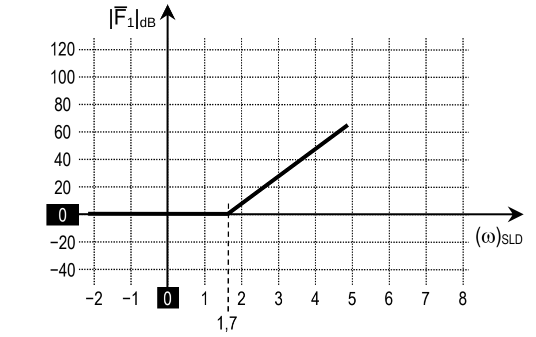
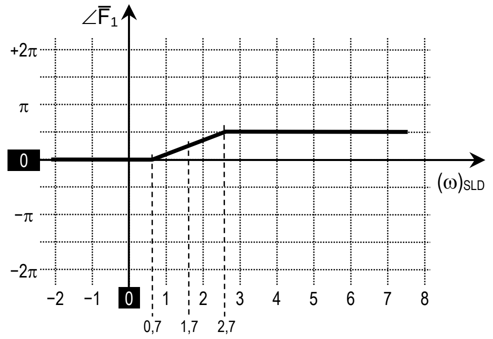
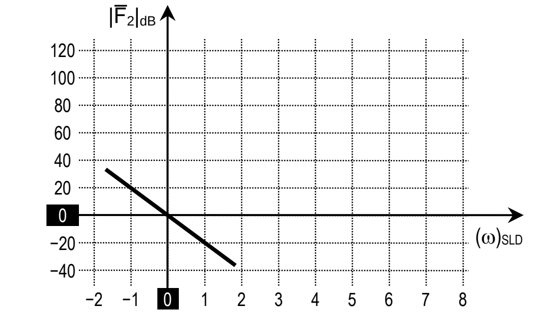
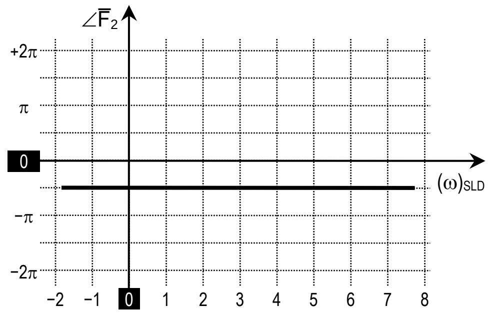
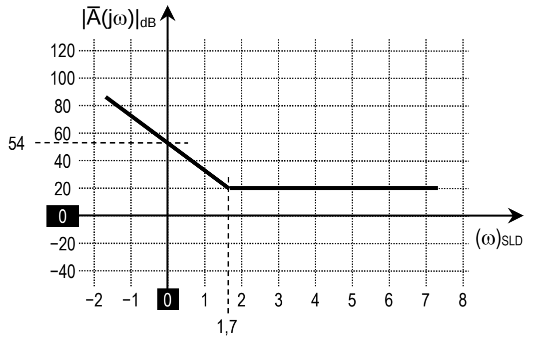
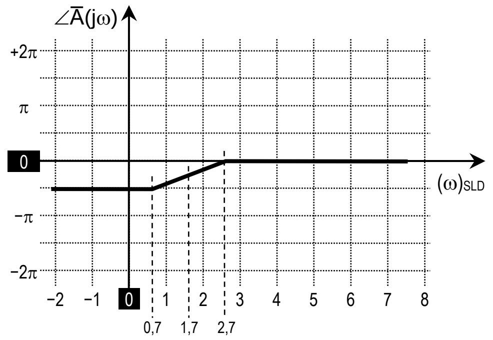
fattore costante	**segno** positivo oppure negativo	**modulo** | K |	**modulo in decibel** | K |$_{dB}$
K = 500	positivo	|K| = 500	$\lvert K\rvert_{dB} = 20 \cdot Log\lvert K\rvert \quad \cong 54$

fattore funzione di jω	**costante di tempo** (τ_z) oppure (τ_p)	**pulsazione di taglio** (ω_z) oppure (ω_p)	**pulsazione di taglio in SLD** $(\omega_z)_{SLD}$ oppure $(\omega_p)_{SLD}$
$\overline{F}_1 = 1 + j\omega\frac{1}{50}$	$\tau_z = \frac{1}{50}$	$\omega_z = \frac{1}{\tau_z} \quad = 50$	$(\omega_z)_{SLD} = Log(\omega_z) \quad = 1{,}7$
$\overline{F}_2 = \frac{1}{j\omega}$			

Posizione delle pulsazioni di taglio in scala logaritmica decimale (SLD).



2) Tracciare i diagrammi di Bode di ciascun fattore, poi sommarli tra loro ottenendo così i diagrammi di Bode dell'intera FdT

fattore	**grafico del modulo**	**grafico della fase**
$K = 500$ $\lvert K\rvert_{dB} = 54$		
$\overline{F}_1 = 1 + j\omega\frac{1}{50}$ ω_z=50 $(\omega_z)_{SLD}$=1,7		
$\overline{F}_2 = \frac{1}{j\omega}$		
fdt complessiva $K \cdot \overline{F}_1 \cdot \overline{F}_2$		

Esercizio 3

Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento in regime sinusoidale.

$$\overline{A}(j\omega) = \frac{5 \cdot 10^4 + j\omega}{10^2 + j\omega} .$$

SOLUZIONE

1) Trascrivere la FdT in forma canonica, individuando così i suoi fattori elementari

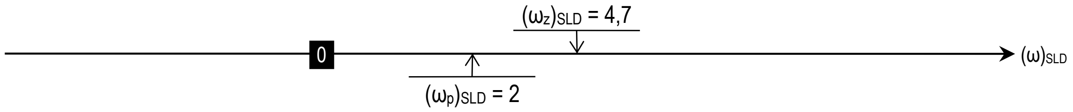
$$\overline{A}(j\omega) = \frac{5 \cdot 10^4 + j\omega}{10^2 + j\omega} \xrightarrow{forma\ canonica} = \underbrace{500}_{K} \cdot \underbrace{\left(1 + j\omega \frac{1}{5 \cdot 10^4}\right)}_{\overline{F}_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + j\omega \frac{1}{10^2}}}_{\overline{F}_2}$$

Esaminiamo i singoli fattori.

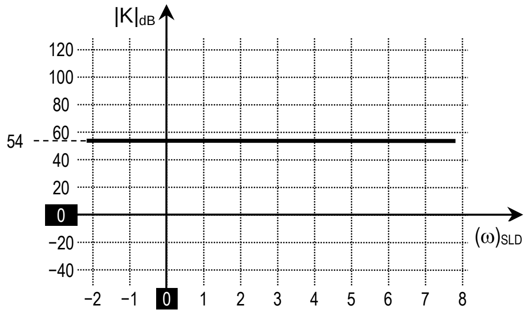
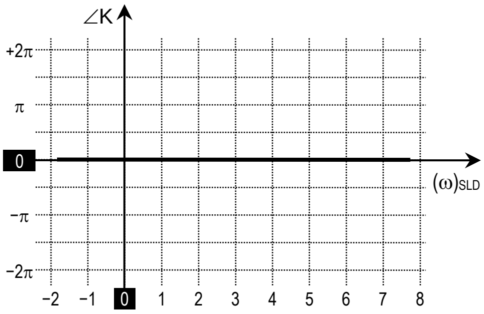
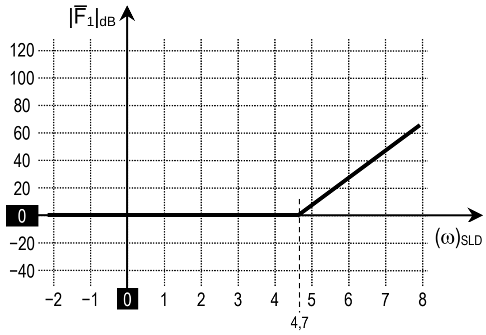
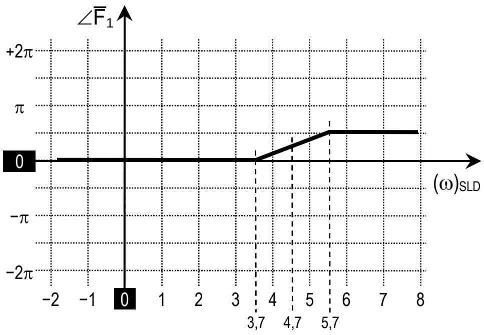
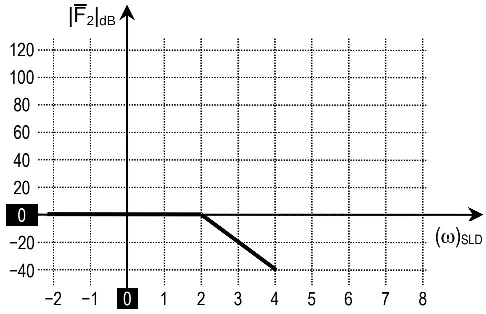
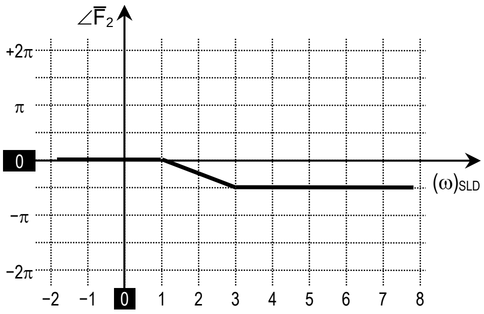
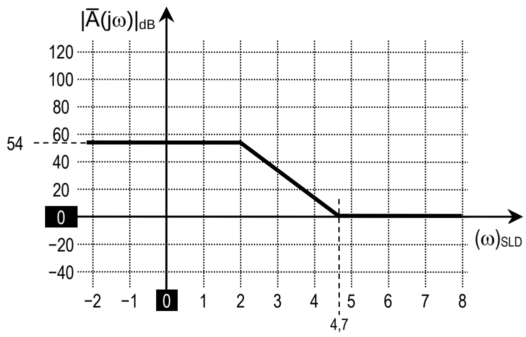
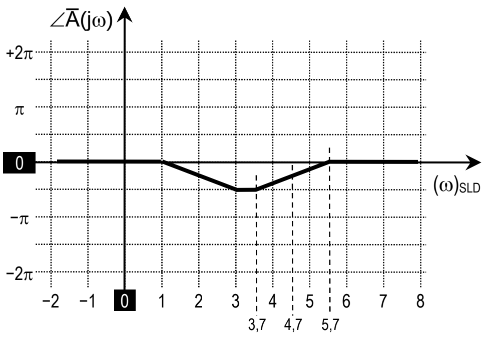
fattore costante	**segno** positivo oppure negativo	**modulo** $\lvert K \rvert$	**modulo in decibel** $\lvert K \rvert_{dB}$
K = 500	positivo	$\lvert K \rvert = 500$	$\lvert K\rvert_{dB} = 20 \cdot Log\lvert K\rvert \quad \cong 54$

fattore funzione di jω	**costante di tempo** (τ_z) oppure (τ_p)	**pulsazione di taglio** (ω_z) oppure (ω_p)	**pulsazione di taglio in SLD** $(\omega_z)_{SLD}$ oppure $(\omega_p)_{SLD}$
$\overline{F}_1 = 1 + j\omega \frac{1}{5 \cdot 10^4}$	$\tau_z = \frac{1}{5 \cdot 10^4}$	$\omega_z = \frac{1}{\tau_z} \quad = 5 \cdot 10^4$	$(\omega_z)_{SLD} = Log(\omega_z) \quad = 4{,}7$
$\overline{F}_2 = \frac{1}{1 + j\omega \frac{1}{10^2}}$	$\tau_p = \frac{1}{10^2}$	$\omega_p = \frac{1}{\tau_p} \quad = 10^2$	$(\omega_p)_{SLD} = Log(\omega_p) \quad = 2$

Posizione delle pulsazioni di taglio (ω_z e ω_p).



2) Tracciare i diagrammi di Bode di ciascun fattore, poi sommarli tra loro ottenendo così i diagrammi di Bode dell'intera FdT

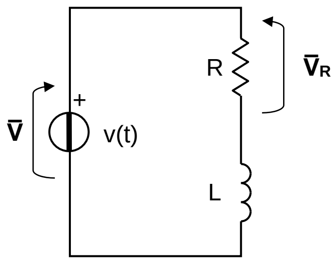
fattore	grafico del modulo	grafico della fase
$K = 500$ --------------------- $\lvert K\rvert_{dB} = 54$		
$\overline{F}_1 = 1 + j\omega\frac{1}{5\cdot 10^4}$ --------------------- $\omega_z = 5\cdot 10^4$ $(\omega_z)_{SLD} = 4{,}7$		
$\overline{F}_2 = \frac{1}{1 + j\omega\frac{1}{10^2}}$ --------------------- $\omega_p = 10^2$ $(\omega_p)_{SLD} = 2$		
fdt complessiva $K\cdot\overline{F}_1\cdot\overline{F}_2$		

Esercizio 4

Consideriamo la rete elettrica disegnata a lato.

v(t) = sinusoidale (pulsazione ω)
R = 1 KΩ
L = 10 mH

Quesito: Disegnare i diagrammi di Bode della FdT in reg. sin. : **$\overline{A}(j\omega) = \overline{V}_R / \overline{V}$** .



SOLUZIONE

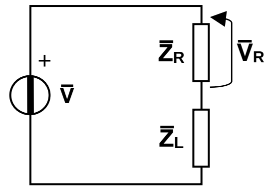
1) Calcolare la FdT in regime sinusoidale

Occorre esprimere tutti i dati nelle rispettive unità fondamentali ed esprimere le impedenze di tutti i componenti del circuito.

R = 1 KΩ = 10^3 Ω ❖ $\overline{Z}_R = R$ = 10^3
L = 10 mH = $10 \cdot 10^{-3}$ H ❖ $\overline{Z}_L = j\omega \cdot L$ = $j\omega \cdot 10^{-2}$

La tensione $\overline{V}_R$ può essere calcolata con la regola del partitore:

$$\overline{V}_R = \overline{V} \cdot \frac{\overline{Z}_R}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_L} = \overline{V} \cdot \frac{10^3}{10^3 + j\omega \cdot 10^{-2}} .$$



Da ciò si ricava la FdT in regime sinusoidale:

$$\overline{A}(j\omega) = \frac{10^3}{10^3 + j\omega \cdot 10^{-2}} .$$

2) Trascrivere la FdT in forma canonica, individuando così i suoi fattori elementari

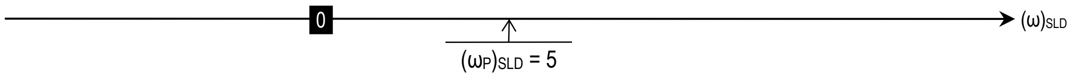
$$\overline{A}(j\omega) = \frac{10^3}{10^3 + j\omega \cdot 10^{-2}} \xrightarrow{forma\ canonica} = \underbrace{\frac{1}{1 + j\omega \cdot 10^{-5}}}_{\overline{F}_1}$$

Esaminiamo i singoli fattori.

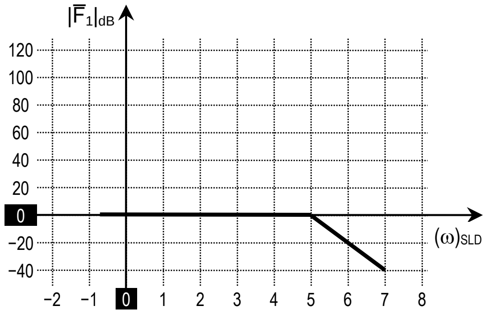
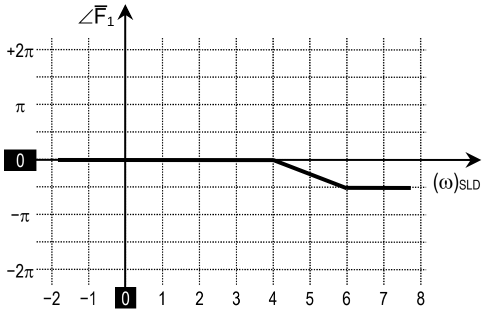
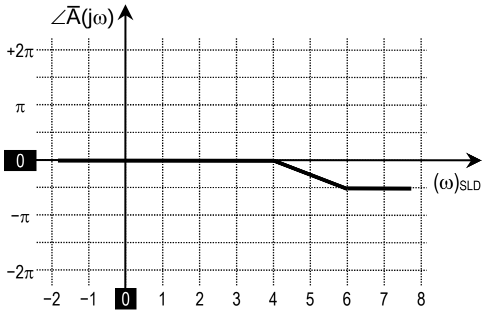
fattore costante	**segno** positivo oppure negativo	**modulo** $\lvert K \rvert$	**modulo in decibel** $\lvert K \rvert_{dB}$

fattore funzione di jω	**costante di tempo** (τ_z) oppure (τ_p)	**pulsazione di taglio** (ω_z) oppure (ω_p)	**pulsazione di taglio in SLD** $(\omega_z)_{SLD}$ oppure $(\omega_p)_{SLD}$
$\overline{F}_1 = \dfrac{1}{1 + j\omega \cdot 10^{-5}}$	$\tau_p = 10^{-5}$	$\omega_p = \dfrac{1}{\tau_p} = 10^5$	$(\omega_p)_{SLD} = Log(\omega_p) = 5$

Posizione delle pulsazioni di taglio (ω_z e ω_p).



3) Tracciare i diagrammi di Bode di ciascun fattore, poi sommarli tra loro ottenendo così i diagrammi di Bode dell'intera FdT

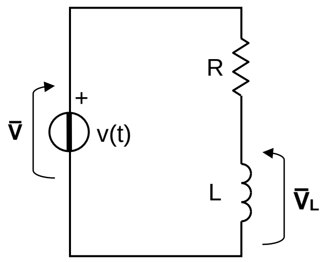
fattore	grafico del modulo	grafico della fase
$\overline{F}_1 = \dfrac{1}{1 + j\omega \cdot 10^{-5}}$ ---------------------- $\omega_p = 10^5$ $(\omega_p)_{SLD} = 5$		
fdt complessiva $\overline{F}_1$		

Esercizio 5

Consideriamo la rete elettrica disegnata a lato.

v(t) = sinusoidale (pulsazione ω)
R = 1 KΩ
L = 10 mH

<u>Quesito</u>: Disegnare i diagrammi di Bode della FdT in reg. sin. : $\overline{A}(j\omega) = \overline{V}_L / \overline{V}$.



SOLUZIONE

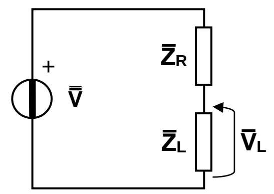
1) Calcolare la FdT in regime sinusoidale

Occorre esprimere tutti i dati nelle rispettive unità fondamentali ed esprimere le impedenze di tutti i componenti del circuito.

R = 1 KΩ	= 1•10³	Ω	❖	$\overline{Z}_R = R$	= 10^3
L = 10 mH	= 10•10⁻³	H	❖	$\overline{Z}_L = j\omega \cdot L$	= $j\omega \cdot 10^{-2}$

La tensione $\overline{V}_L$ può essere calcolata con la regola del partitore:

$$\overline{V}_L = \overline{V} \cdot \frac{\overline{Z}_L}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_L} = \overline{V} \cdot \frac{j\omega \cdot 10^{-2}}{10^3 + j\omega \cdot 10^{-2}}$$



Da ciò si ricava la FdT in regime sinusoidale:

$$\overline{A}(j\omega) = \frac{j\omega \cdot 10^{-2}}{10^3 + j\omega \cdot 10^{-2}}.$$

2) Trascrivere la FdT in forma canonica, individuando così i suoi fattori elementari

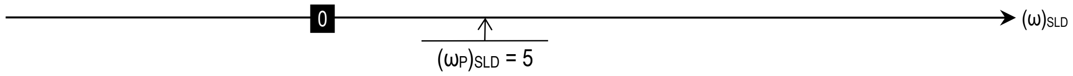
$$\overline{A}(j\omega) = \frac{j\omega \cdot 10^{-2}}{10^3 + j\omega \cdot 10^{-2}} \xrightarrow{forma\ canonica} = \underbrace{10^{-5}}_{K} \cdot \underbrace{j\omega}_{\overline{F}_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + j\omega \cdot 10^{-5}}}_{\overline{F}_2}$$

Esaminiamo i singoli fattori.

fattore costante	**segno** positivo oppure negativo	**modulo** | K |	**modulo in decibel** | K |$_{dB}$
$K = 10^{-5}$	positivo	|K| = 10^{-5}	$\|K\|_{dB} = 20 \cdot Log\|K\| \quad = -100$

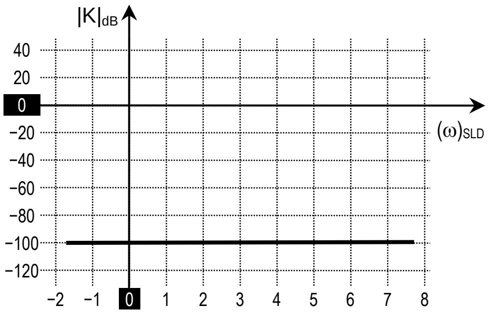
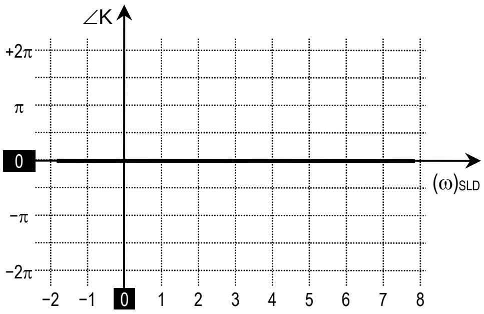
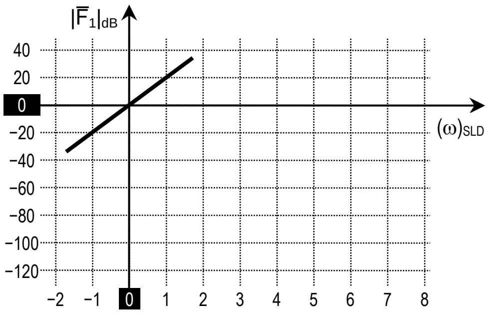
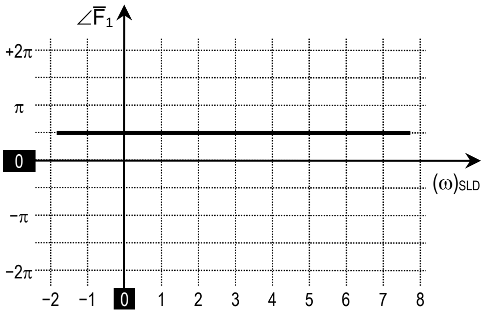
fattore funzione di jω	**costante di tempo** (τ_z) oppure (τ_p)	**pulsazione di taglio** (ω_z) oppure (ω_p)	**pulsazione di taglio in SLD** $(\omega_z)_{SLD}$ oppure $(\omega_p)_{SLD}$
$\overline{F}_1 = j\omega$			
$\overline{F}_2 = \dfrac{1}{1 + j\omega \cdot 10^{-5}}$	$\tau_p = 10^{-5}$	$\omega_p = \dfrac{1}{\tau_p} \quad = 10^5$	$(\omega_p)_{SLD} = Log(\omega_p) \quad = 5$

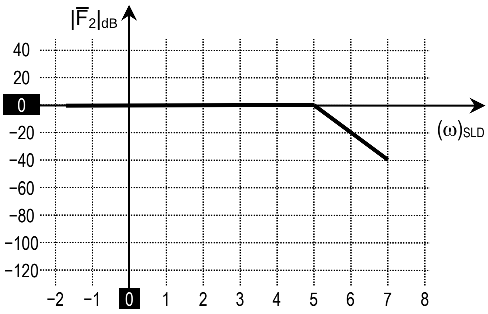
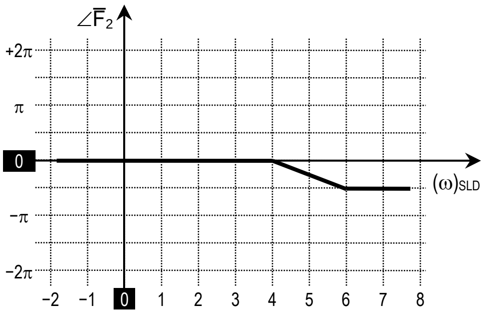
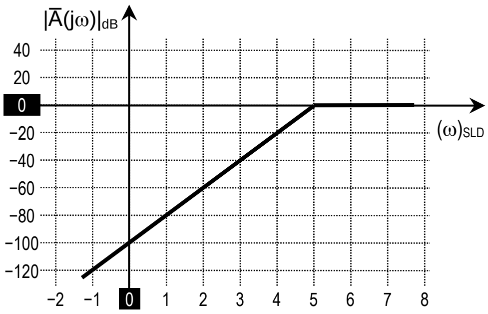
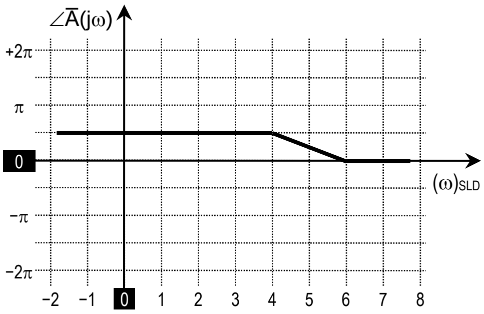
Posizione delle pulsazioni di taglio (ω_z e ω_p).



3) Tracciare i diagrammi di Bode di ciascun fattore, poi sommarli tra loro ottenendo così i diagrammi di Bode dell'intera FdT

<table>
<tr><th>fattore</th><th>grafico del modulo</th><th>grafico della fase</th></tr>
<tr><td>$K = 10^{-5}$

$|K|_{dB} = -100$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\overline{F}_1 = j\omega$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\overline{F}_2 = \frac{1}{1 + j\omega \cdot 10^{-5}}$

$\omega_p=10^5$
$(\omega_p)_{SLD}=5$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>fdt complessiva
$K \cdot \overline{F}_1 \cdot \overline{F}_2$</td><td></td><td></td></tr>
</table>